



**Facultad
de
Ciencias**

Vibraciones en medios homogéneos y compuestos

(Vibrations in homogeneous and compound mediums)

Trabajo de Fin de Grado
Para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Javier Gómez de la Gándara Pérez
Directora: Delfina Gómez Gandarillas

Fecha: Septiembre - 2021

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mis padres Roberto y Lucrecia por haberse sacrificado y haberme apoyado en todo momento durante los 5 años de carrera y en particular durante este último año. Querría hacer mención a mi abuelo Braulio, el que me inculcó la pasión por las matemáticas. Estoy seguro que te gustaría este trabajo.

A mi directora Delfina, por su disposición, guía, compromiso y paciencia en todo momento, aún cuando estuve en momentos más inactivo durante este curso 2020-2021 debido al máster que estaba cursando.

En último lugar, a mis compañeros y amigos que he hecho durante la carrera. Estoy seguro que sin ellos, el día a día en la facultad no hubiese sido lo mismo, aunque desde la pandemia esto quede un poco lejano. También quiero mencionar a María, por haberme apoyado estos últimos años y concretamente durante este trabajo, el cual me ha quitado bastante tiempo. Ahora me toca ayudarte a tí.

Resumen

Una de las principales aplicaciones de la ecuación de ondas son los denominados sistemas vibratorios. En este trabajo se estudia un problema que describe las vibraciones de un medio, tanto en el caso homogéneo como compuesto, sujeto en su borde y dadas su posición y velocidad iniciales. Se formula el problema en un marco abstracto que permite garantizar la existencia y unicidad de solución. Posteriormente, se determina la solución para algunos casos particulares.

Palabras clave: Vibraciones, ecuación de ondas, problema espectral, series de Fourier, formulación variacional.

Abstract

One of the main applications of the wave equation are the vibrating systems. In this work we have analysed a problem which describes the vibrations of a medium, in both homogeneous and compound cases, bounded in their border and given its initial position and velocity. The problem is formulated in an abstract framework which allows to guarantee the existence and uniqueness of solution. Afterwards we have determined the solution for some particular cases.

Key words: Vibrations, wave equation, spectral problem, Fourier series, variational analysis.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	2
1.1. Formulación del problema de vibraciones homogéneo	2
1.2. Marco abstracto	4
1.3. Funciones de Bessel y Polinomios de Legendre	9
2. Vibraciones en medios homogéneos	14
2.1. Vibraciones de una cuerda homogénea	14
2.2. Vibraciones de una membrana circular homogénea	17
2.3. Vibraciones de un anillo circular homogéneo	26
2.4. Vibraciones de una esfera homogénea	29
3. Vibraciones en medios compuestos	36
3.1. Marco abstracto para un medio compuesto	37
3.2. Vibraciones de una cuerda compuesta	39
3.3. Vibraciones de una membrana circular compuesta	43
Bibliografía	49

Introducción

El tema objeto de estudio es la descripción de vibraciones en medios, tanto homogéneos como compuestos, mediante determinados modelos matemáticos. El modelo para medios homogéneos de densidad $1/c^2$ sujetos por el borde y dados su posición y velocidad inicial consistirá en hallar una función que satisfaga un problema formado por una ecuación diferencial (la ecuación de ondas en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ donde pueden aparecer determinados parámetros en diferentes regiones del dominio), ciertas condiciones de contorno (condición Dirichlet nula) y ciertas condiciones iniciales (sobre la función y su derivada). Esta clase de problemas se denominan problemas mixtos.

En el primer capítulo se describirá dicho modelo matemático en el caso homogéneo así como el proceso que se llevará a cabo para su resolución. Este proceso consistirá en buscar soluciones $u(\mathbf{x}, t)$ mediante separación de variables $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $T(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no idénticamente nulas para así llegar a un problema de valores propios. Posteriormente se definirá el marco abstracto para asegurar, en lo que respecta al problema de valores propios, la existencia de un conjunto numerable y positivo de valores propios junto con sus correspondientes funciones propias, las cuales veremos que forman una base ortogonal de $L^2(\Omega)$. Por otro lado, aseguraremos la existencia y unicidad de solución para el problema mixto de vibraciones. Para ello, se trabajará con la formulación variacional de ambos problemas y se enunciarán varios resultados teóricos. Por último, se introducirán dos familias de funciones especiales que aparecen al resolver la ecuación de ondas en dominios circulares y esféricos, las funciones de Bessel y las funciones asociadas de Legendre, respectivamente, y que serán utilizadas en los capítulos posteriores.

En cuanto al capítulo dos, se resolverán varios ejemplos de vibraciones en medios homogéneos de densidad $1/c^2$ con $c > 0$, en diferentes dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $N = 1, 2$ y 3 , con el objetivo de poder calcular explícitamente los valores y funciones propias. El primer dominio considerado fue el caso unidimensional, $\Omega = (0, L)$ con $L > 0$, el cual describía las vibraciones de una cuerda. Otros dominios bidimensionales considerados fueron $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ con $R > 0$ y $\Omega = B(0, R_2) \setminus \overline{B(0, R_1)} \subset \mathbb{R}^2$ con $R_2 > R_1 > 0$, representando las vibraciones en una membrana y anillo circulares, respectivamente. Por último, se consideró un dominio tridimensional $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$, el cual representaba las vibraciones de una esfera. Se hallaron los valores y las funciones propias explícitas en cada uno de los ejemplos excepto en el anillo circular. Este dominio se consideró al presentar ciertas características en el cálculo de los valores propios que más adelante aparecerían en los medios compuestos. Por último, para cada dominio se resolvió un caso particular de cada problema, con el fin de obtener la solución analíticamente y representarla mediante Matlab. En los problemas bidimensionales se obtuvo adicionalmente la solución de manera numérica mediante la Toolbox PDETool de Matlab con la finalidad de comparar ambas soluciones.

En el tercer y último capítulo nos hemos centrado en el problema de vibraciones definido para medios compuestos, entendiendo un medio compuesto como un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ formado por dos regiones disjuntas: $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ con densidades $1/c_1^2$ y $1/c_2^2$, respectivamente, con $c_1, c_2 > 0$. Además, presentan una frontera común entre ellos $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ no vacía. Nuevamente, se formuló el marco abstracto aplicado a este problema de vibraciones y como ejemplos se tomaron un dominio unidimensional y otro bidimensional. A diferencia de los problemas tratados en el capítulo dos, en estos problemas no se podían hallar de manera explícita los valores propios, quedando descritos a través de una ecuación trascendente. En consecuencia, se obtuvieron las expresiones de las funciones propias y se representó una función propia para diferentes combinaciones de las regiones Ω_1 y Ω_2 , así como de las densidades $1/c_1^2$ y $1/c_2^2$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se va a formular el problema que describe las vibraciones de un medio homogéneo y a enunciar el marco abstracto necesario para definir los problemas sobre vibraciones que trataremos. Mediante dicho marco abstracto se llegará a asegurar la existencia y unicidad de solución, a través de la formulación débil del problema. Posteriormente se estudiarán ciertas familias de funciones: las funciones de Bessel y Legendre.

1.1. Formulación del problema de vibraciones homogéneo

En esta sección se plantea un problema que describe las vibraciones de un medio homogéneo y acotado sujeto en su borde, dadas su posición y velocidad iniciales. Es decir, buscamos soluciones de la ecuación de ondas en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$, condición de frontera Dirichlet nula y que verifiquen ciertas condiciones iniciales.

La ecuación de ondas es una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólica cuya expresión en el caso N -dimensional para una función $u(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ es la variable espacial N -dimensional y $t \in \mathbb{R}^+$ la variable temporal, es la siguiente:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} \quad (1.1.1)$$

con $c > 0$ la velocidad de propagación en dicho medio y por tanto una constante relacionada con la densidad del mismo, $1/c^2$. Esta ecuación (1.1.1) se puede expresar de manera más compacta mediante el operador laplaciano $\Delta_{\mathbf{x}}$ o $\nabla_{\mathbf{x}}^2$, el cual en coordenadas cartesianas equivale a la suma de todas las segundas derivadas parciales no cruzadas. Su definición y la expresión de la ecuación de ondas haciendo uso de dicho operador es:

$$\Delta_{\mathbf{x}} := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{y por tanto} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.2)$$

Cuando no haya confusión y se tenga una determinada función $X(\mathbf{x})$ definida en un dominio espacial Ω , se escribirá $\Delta X(\mathbf{x})$ en vez de $\Delta_{\mathbf{x}} X(\mathbf{x})$.

Además, como notación de aquí en adelante escribiremos de manera recurrente las derivadas parciales con subíndices sobre la función. Así, nos referiremos por ejemplo a la derivada parcial de una función de dos variables $u(x, t)$ con respecto a x como $u_x(x, t)$ o a la segunda derivada de $u(x, t)$ con respecto a t como $u_{tt}(x, t)$, es decir:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u_x(x, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = u_{tt}(x, t).$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar la formulación del problema a estudiar. Sea un medio homogéneo de densidad $1/c^2$ N -dimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que se encuentra sujeto en su borde y del que se conocen tanto su posición inicial $f(\mathbf{x})$ como su velocidad inicial $g(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \Omega$ y ambas no nulas. El problema matemático consiste en encontrar una función $u(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ que verifique la ecuación de ondas (1.1.1) y ciertas condiciones: la condición Dirichlet homogénea en la frontera de Ω , $\partial\Omega$, y las condiciones iniciales $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})$. Así, su formulación matemática se recoge en el problema (1.1.3):

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} u_{tt}(\mathbf{x}, t) = \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, & \text{Ec. de Ondas,} \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, & \text{Condición de Contorno,} \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, & \text{Condición Inicial I,} \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, & \text{Condición Inicial II,} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

el cual se denomina problema mixto, ya que involucra tanto condiciones de contorno como condiciones iniciales.

Para la resolución de dicho problema se buscan soluciones no idénticamente nulas mediante el método de separación de variables, es decir, soluciones en las que $u(\mathbf{x}, t)$ sea producto de una función que depende solamente de \mathbf{x} y otra función que depende solo de t , de la forma:

$$u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t) \quad (1.1.4)$$

con $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase \mathcal{C}^2 no nulas. Sustituyendo dicha hipótesis en la ecuación de ondas y dividiendo entre la función $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$, se llega a:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta_{\mathbf{x}} X(\mathbf{x})}{X(\mathbf{x})} = -\lambda \in \mathbb{R} \quad (1.1.5)$$

donde se ha igualado la expresión a $-\lambda \in \mathbb{R}$ debido a que esta ecuación se debe cumplir para todo valor $t > 0$ y $\mathbf{x} \in \Omega$. Al depender en un lado de la ecuación exclusivamente de la variable temporal y en el otro lado depender solamente de las variables espaciales, la única forma posible para cumplir la igualdad es que dicho valor sea una constante.

Empezando por $X(\mathbf{x})$, además de la ecuación diferencial definida en Ω se obtiene una nueva condición a partir de la condición de contorno del problema (1.1.3). Así, utilizando que $0 = u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$ si $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, obtenemos que $X(\mathbf{x}) = 0$ cuando $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, pues buscamos soluciones no nulas y por tanto, $T(t) \neq 0$. De esta manera se llega al siguiente problema de valores propios (1.1.6), en el cual se debe hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema admite soluciones $X(\mathbf{x})$ no idénticamente nulas:

$$\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) + \lambda X(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ X(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Los valores λ se denominan valores propios y las soluciones para dichos valores propios $X(\mathbf{x})$ son las funciones propias del problema. Una vez calculados los valores y las funciones propias, se resuelve la ecuación diferencial que verifica $T(t)$ obtenida en la separación de variables para los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenidos, la cual es:

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad \text{si } t > 0 \quad (1.1.7)$$

donde el significado físico del término λc^2 es el cuadrado de la velocidad angular de vibración, ω^2 , el cual está relacionado con la frecuencia de vibración, como se comentará más adelante.

Está claro que las funciones (1.1.4), donde $X(\mathbf{x})$ y $T(t)$ verifican (1.1.6) y (1.1.7) respectivamente, pueden no satisfacer las condiciones iniciales. Para ello, necesitamos previamente conocer ciertos resultados teóricos sobre las funciones propias, lo cual se llevará a cabo en la Sección 1.2.

1.2. Marco abstracto

En esta sección se van a introducir algunas de las propiedades necesarias para asegurar la existencia y unicidad de solución del problema mixto (1.1.3). Para ello se introducirá su formulación variacional, al igual que la del problema de valores propios asociado, ambos introducidos en la Sección 1.1. La bibliografía consultada ha sido [8], [2] y [3].

Antes de ello, se necesitan definir una serie de conceptos y resultados teóricos previos. Durante toda la sección V y H serán espacios de Hilbert separables sobre el cuerpo de los reales de tal forma que V es un subespacio denso de H con inclusión compacta, es decir el operador inclusión $i : V \rightarrow H$ es compacto. Denotaremos por $(\cdot, \cdot)_V$ y $(\cdot, \cdot)_H$ a sus respectivos productos escalares.

Asímismo, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ será una forma bilineal simétrica que verifica:

- Continuidad: existe una constante $C > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$ para todo $u, v \in V$.
- Coercividad: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha\|u\|_V^2$ para todo $u \in V$.

Con ambos espacios y la forma bilineal definidos, podemos enunciar un resultado que nos servirá para determinar ciertas propiedades que cumplen los valores propios y las funciones propias del problema espectral, dentro de un marco abstracto conveniente.

Teorema 1.2.1 *Bajo las hipótesis anteriores consideramos el problema de valores propios siguiente: hallar los valores λ para los cuales existe solución $u \in V$ no trivial de la ecuación:*

$$a(u, v) = \lambda(u, v)_H \quad \forall v \in V. \quad (1.2.1)$$

Entonces existe una sucesión creciente y numerable de números reales positivos, denominados valores propios del problema (1.2.1), tendiendo a $+\infty$:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

y una base ortogonal de H , denotada por $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ formada por funciones propias del problema de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$a(u_n, v) = \lambda_n(u_n, v)_H \quad \forall v \in V. \quad (1.2.2)$$

Además, $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ es una base ortogonal de V con el producto escalar inducido por la forma $a(\cdot, \cdot)$.

Este es un resultado básico dentro de los problemas mixtos y su demostración se puede encontrar en [3] ó [2], entre otros.

A continuación se van a definir ciertos espacios de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. En primer lugar, se define $L^2(\Omega)$ como el espacio de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de cuadrado integrable en Ω . Como es habitual, trabajaremos con clases de equivalencia, donde se identifican dos funciones de $L^2(\Omega)$ si coinciden en casi todo punto de Ω , es decir, salvo en un conjunto de medida Lebesgue nula.

Asímismo definimos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ como el espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ tales que todas sus derivadas parciales de primer orden, en el sentido de las distribuciones, son elementos de $L^2(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ para } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Se definen los productos escalares de estos espacios como:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

y

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

los cuales tienen asociadas las normas:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \quad (1.2.3)$$

siendo ∇ el gradiente.

Por último, introducimos el espacio $H_0^1(\Omega)$ como las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω , es decir:

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega\}.$$

Ahora estamos en condiciones de introducir el planteamiento para demostrar la existencia y unicidad de solución al problema de vibraciones. En primer lugar, tomamos $H = L^2(\Omega)$ y $V = H_0^1(\Omega)$, siendo ambos espacios separables, ver [2] y además $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es un subespacio denso de H con inclusión compacta.

Como forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ tomamos:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.2.4)$$

la cual es simétrica y veremos a continuación que además es continua y coerciva.

Por un lado, para probar la continuidad se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la cual aplicada a ∇u y ∇v , es:

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donde se ha utilizado la norma asociada al producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ como la inducida de $H^1(\Omega)$, vista en (1.2.3). Así, se prueba la continuidad.

Por otro lado, la demostración de la coercividad se basa en la desigualdad de Poincaré, cuya demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [2] y es:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

con $C > 0$ una constante que depende solamente del dominio Ω .

Utilizando esta desigualdad y las definiciones de los productos escalares (1.2.3), tenemos:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq (C^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

y en consecuencia, la forma $a(\cdot, \cdot)$ definida en (1.2.4) es coerciva con $\alpha = (C^2 + 1)^{-1}$.

Una vez probadas las dos propiedades de la forma bilineal, vamos a introducir el proceso efectuado para escribir el problema (1.1.3) en su formulación débil. Para ello partimos de la ecuación de ondas, multiplicamos por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos en el dominio Ω :

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_{tt}(\mathbf{x}, t) v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2.5)$$

La parte derecha se puede reescribir utilizando la primera identidad de Green, la cual se basa en la expresión $\nabla(v \nabla u) = \nabla u \nabla v + v \Delta u$. La identidad es:

$$\int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v \, dS - \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) \nabla v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a Ω .

Como $v = 0$ en $\partial\Omega$, la integral sobre la frontera $\partial\Omega$ se anula y sustituyendo en (1.2.5):

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_{tt}(\mathbf{x}, t) v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) \nabla v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Antes de mostrar la formulación débil, se realiza una identificación entre la función incógnita de (1.1.3) $u(\mathbf{x}, t)$ definida para $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ con una función unidimensional denotada $\mathbf{u}(\cdot, t)$, con valores en el espacio $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. En este contexto, definimos también $C^k([0, T_0]; H_0^1(\Omega))$ con $T_0 > 0$ como el espacio de funciones de clase C^k definidas en $[0, T_0] \subset \mathbb{R}$ con valores en $V = H_0^1(\Omega)$. Es decir, para cada $t \in [0, T_0]$ la imagen $u(\cdot, t)$ es un elemento de $H_0^1(\Omega)$.

Con esta notación, el problema consiste en hallar una función $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C([0, T_0]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_0]; L^2(\Omega))$ tal que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(\cdot, t), v \right)_{L^2(\Omega)} + a(\mathbf{u}(\cdot, t), v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) & \text{si } 0 < t < T_0, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = f, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\cdot, 0) = g \end{cases} \quad (1.2.6)$$

donde $f \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$ funciones conocidas, obteniendo así la formulación débil del problema (1.1.3).

En la Sección 1.1 se enuncio que el problema de vibraciones (1.1.3) tiene asociado, mediante separación de variables $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$ el problema de valores propios (1.1.6). Su formulación débil se obtiene de manera similar al esquema efectuado en la expresión (1.2.5) pero partiendo de la ecuación $-\Delta X = \lambda X$ con $X \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla X \nabla v \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} X v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.2.7)$$

Es decir, el problema consiste en hallar los λ y $X \in H_0^1(\Omega)$ no nulos tales que:

$$a(X, v) = \lambda(X, v)_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2.8)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ es la forma definida por (1.2.4).

Como se cumplen las hipótesis del Teorema 1.2.1, podemos asegurar que existe un conjunto numerable y ordenado de valores propios $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ positivos y las correspondientes funciones propias $\{X_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ formando una base ortogonal en $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

Como ejemplo de este resultado, vamos a abordar el problema unidimensional planteado en el intervalo $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$. Dicho problema aparecerá más adelante al estudiar las vibraciones de una cuerda homogénea unidimensional.

Ejemplo 1.2.2 Sea el siguiente problema de valores propios en el intervalo $(0, L)$:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{con } u(0) = u(L) = 0. \quad (1.2.9)$$

Escribimos su formulación débil para obtener una expresión que cumpla las hipótesis del Teorema 1.2.1. Seguimos el mismo procedimiento, multiplicando por una función test $v \in H_0^1(0, L)$:

$$\int_0^L u''(x)v(x)dx + \lambda \int_0^L u(x)v(x)dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, L).$$

Integrando por partes el término de la integral izquierda:

$$\left[u'(x)v(x) \right]_0^L - \int_0^L u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^L u(x)v(x)dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, L),$$

es decir,

$$\int_0^L u'(x)v'(x)dx = \lambda \int_0^L u(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(0, L),$$

donde el primer sumando se ha simplificado debido a que $v(0) = v(L) = 0$, al pertenecer v a $H_0^1(0, L)$. Así, llegamos a la expresión obtenida en (1.2.7) para el caso unidimensional. En términos de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ análoga a la definida en (1.2.4) para funciones unidimensionales, el problema se convierte en:

$$a(u(x), v(x)) = \lambda(u(x), v(x)) \quad \forall v \in H_0^1(0, L)$$

y aplicando el Teorema 1.2.1, podemos asegurar que existe un conjunto numerable y ordenado de valores propios positivos $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ y unas funciones propias $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ortogonales en $L^2(0, L)$. Sabiendo su existencia, vamos a calcular valores de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ para los cuales el problema (1.2.9) tiene solución no nula.

A partir de aquí, su resolución es bastante conocida al ser un ejemplo usual, pudiéndose encontrar en [12] ó [6]. Como sabemos que estos valores propios son positivos, escribimos $\lambda = k^2$ para algún $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En consecuencia, las soluciones de la ecuación diferencial $u''(x) = -k^2 u(x)$ son combinaciones de senos y cosenos

$$u(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx).$$

La primera condición de contorno $u(0) = 0$ fuerza a que $b = 0$, mientras que la condición $u(L) = 0$ nos lleva a que $a \sin(kL) = 0$. Como u no es idénticamente cero, $a \neq 0$. En consecuencia, se tiene $\sin(kL) = 0$ y por tanto kL debe ser un múltiplo entero de π . En términos de λ , se tiene $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ y en consecuencia los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \text{ con } n \in \mathbb{N},$$

los cuales forman una sucesión creciente tendiendo a $+\infty$, tal y como nos aseguraba el Teorema. Para cada valor propio λ_n podemos tomar como función propia:

$$u_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

obteniendo las soluciones no triviales del problema (1.2.9). Por último, es fácil comprobar que estas funciones propias $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ son ortogonales en $L^2(0, L)$:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{L}{2} & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Una vez introducido el problema de vibraciones (1.2.6), debemos asegurarnos de su existencia y unicidad. Para ello nos serviremos de varios resultados presentes en [3], cuyas demostraciones, en caso de no incluirlas, se pueden consultar en la misma referencia.

El siguiente Teorema enuncia una expresión para la solución del problema (1.2.6), en caso de que ésta exista. Su demostración ha sido adaptada del Teorema 15.1 de [3].

Teorema 1.2.3 Si u es una solución del problema (1.2.6), entonces es de la forma:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(f, X_n)_{L^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L^2(\Omega)}} \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} c} \frac{(g, X_n)_{L^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L^2(\Omega)}} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) \right] X_n \quad (1.2.11)$$

Demostración: Como $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ para cada $t \in [0, T_0]$ y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortogonal de $L^2(\Omega)$, u se puede escribir:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u(t), X_n)_{L^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L^2(\Omega)}} X_n \quad \forall t \in [0, T_0] \quad (1.2.12)$$

para lo cual vamos a calcular las funciones reales $\phi_n(t) = (u(t), X_n)_{L^2(\Omega)}$.

Sabemos que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ para casi todo $t \in [0, T_0]$, es decir, salvo en un conjunto de medida Lebesgue nula. Utilizando la expresión (1.2.2) con $v = X_n$, para un n fijo:

$$a(u(t), X_n) = a(X_n, u(t)) = \lambda_n (X_n, u(t))_{L^2(\Omega)} = \lambda_n \phi_n(t)$$

y sustituyendo esta expresión junto a la definición de $\phi_n(t)$ en la ecuación diferencial de (1.2.6) con $v = X_n$ se llega al problema:

$$\begin{cases} \phi_n''(t) + \lambda_n c^2 \phi_n(t) = 0 & t \in (0, T_0) \\ \phi_n(0) = (f, X_n)_{L^2(\Omega)} \quad y \quad \phi_n'(0) = (g, X_n)_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Como $\lambda_n > 0$, se obtiene $\phi_n(t)$ de la forma:

$$\phi_n(t) = (f, X_n)_{L^2(\Omega)} \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} c} (g, X_n)_{L^2(\Omega)} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct). \quad (1.2.14)$$

Finalmente, utilizando que $\phi_n(t) = (u(t), X_n)_{L^2(\Omega)}$, se llega a la solución $u(t)$ desarrollada en (1.2.11).

Observación 1.2.4 Los cocientes de productos escalares presentes en la expresión de $u(t)$ no son más que los coeficientes de Fourier de f y g en términos de la base de funciones propias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. A menudo se denotan como a_n y b_n respectivamente, es decir:

$$a_n = \frac{(f, X_n)_{L^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L^2(\Omega)}} \quad y \quad b_n = \frac{(g, X_n)_{L^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L^2(\Omega)}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Es frecuente encontrar la solución 1.2.11 con estos coeficientes, según:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) X_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} c} b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) X_n.$$

Tenemos ya una representación de la solución en caso de existir. Enunciaremos a continuación el resultado que nos proporciona la existencia y unicidad de solución.

Teorema 1.2.5 (Existencia y unicidad) El problema (1.2.6) tiene una única solución u que depende únicamente de las condiciones iniciales f y g . Más aún, existe una constante C independiente de f y g tal que:

$$\|u\|_{C([0, T_0]; H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{C^1([0, T_0]; L^2(\Omega))} \leq C(\|f\|_{H_0^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}). \quad (1.2.15)$$

Su demostración se puede encontrar en [3], concretamente en los Teoremas 15.2 y 15.3. La expresión (1.2.15) proporciona la dependencia continua respecto de los datos de la solución del problema (1.2.6). Esto implica que pequeñas perturbaciones en los datos en intervalos de tiempo cortos implican pequeños cambios en la solución.

1.3. Funciones de Bessel y Polinomios de Legendre

En esta sección hacemos una recapitulación de la definición de ciertas funciones especiales, las denominadas funciones de Bessel y los polinomios de Legendre, y algunas de sus propiedades que nos resultarán útiles.

Empezaremos definiendo las funciones de Bessel:

Definición 1.3.1 (Funciones de Bessel) Las funciones de Bessel son las soluciones de la ecuación diferencial

$$r^2 x''(r) + rx'(r) + (r^2 - \alpha^2)x(r) = 0 \quad (1.3.1)$$

denominada Ecuación de Bessel de orden α .

Como (1.3.1) es una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión 2 y debemos encontrar 2 soluciones linealmente independientes. No se debe confundir el orden de la ecuación diferencial, que es 2, con el orden de una ecuación de Bessel, α . La obtención de dichas soluciones se puede encontrar en [6] o en [4].

En primer lugar veremos las funciones de Bessel de primera clase (también llamadas de primera especie) y orden $\alpha \in \mathbb{R}$, $J_\alpha(r)$ como:

$$J_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

donde Γ denota la función Gamma.

En cuanto a la segunda solución independiente, si $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces las soluciones $J_\alpha(r)$ y $J_{-\alpha}(r)$ son linealmente independientes y las soluciones de la ecuación (1.3.1) son de la forma:

$$x(r) = C_1 J_\alpha(r) + C_2 J_{-\alpha}(r) \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

En cambio, si $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y denotando $\alpha = n$, las funciones de Bessel $J_n(r)$ y $J_{-n}(r)$ ya no son linealmente independientes. Se puede ver que en el caso $\alpha = n$ se obtiene $J_n(r) = (-1)^n J_{-n}(r)$.

Para encontrar una segunda solución linealmente independiente, recurrimos a las funciones de Bessel de segunda clase y orden n , $Y_n(r)$, definidas como:

$$Y_n(r) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(r) - J_{-\alpha}(r)}{\sin(\alpha\pi)} \quad \text{si } r > 0.$$

Señalamos que estas funciones $Y_n(r)$ divergen cuando r tiende a 0, a diferencia de las de primera especie, las cuales están siempre acotadas. Por tanto, para el caso $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ las soluciones de la ecuación (1.3.1) son de la forma

$$x(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r) \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

A continuación nos centraremos en el estudio de las funciones de Bessel de orden cero o entero, empezando por algunas de sus propiedades básicas que nos serán de utilidad. Varias de las propiedades están relacionadas con los ceros positivos de J_n , es decir, los puntos tales que $J_n(r) = 0$. Se pueden consultar en más detalle, así como su demostración, en [6], [12] o [1].

Proposición 1.3.2 (Propiedades de las funciones de Bessel) Sean $\{\eta_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{\eta_{mk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ los ceros positivos de las funciones $J_n(r)$ y $J_m(r)$ respectivamente, con $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces se cumple:

1. Los ceros positivos $\{\eta_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ forman un conjunto numerable.
2. Tanto η_{nk} como η_{mk} son todas raíces simples de $J_n(r)$ y $J_m(r)$ respectivamente.

3. Un cero de una función de Bessel $J_n(r)$ no es cero de cualquier otra función de Bessel $J_m(r)$ con $n \neq m$. Es decir, $\eta_{nk} \neq \eta_{mk}$ para todo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos.

4. Entre dos ceros consecutivos de $J_n(r)$, hay exactamente un cero de $Y_n(r)$.

Estas propiedades enumeradas se cumplen igualmente para las funciones de Bessel de segunda especie, cambiando $J_n(r)$ y $J_m(r)$ por $Y_n(r)$ y $Y_m(r)$, respectivamente.

Por último, $J_0(0) = 1$ y $J_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que las funciones de Bessel de segunda especie divergen cuando r tiende a 0.

Las demostraciones de varias de las propiedades se pueden encontrar, por ejemplo, en la Sección 4.2 de [12]. Asimismo, algunas de estas propiedades básicas se pueden observar, sin que sirva de demostración, en la Figura 1.1, donde se han representado las primeras funciones de Bessel de orden entero no negativos. Adicionalmente se observa la divergencia de $Y_n(r)$ cuando r tiende a 0, los ceros simples de cada función de Bessel o cómo los ceros de J_n e Y_n aparecen intercalados.

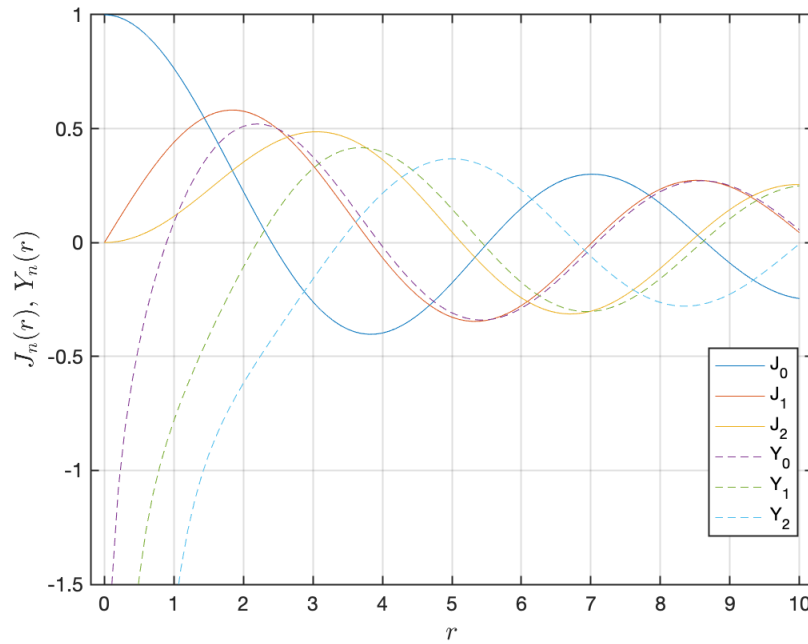


Figura 1.1: Funciones de Bessel de primera y segunda clase para $n = 0, 1, 2$ y representadas mediante líneas continuas y discontinuas, respectivamente.

Por otro lado, en los desarrollos que realizaremos, se trabajará con una ecuación similar a (1.3.1), la ecuación paramétrica de Bessel.

Definición 1.3.3 (Ecuación paramétrica de Bessel) La ecuación paramétrica de Bessel de orden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, obtenida a partir de (1.3.1) mediante el cambio de función incógnita $y(r) = x(\sqrt{\lambda}r)$ con $\lambda > 0$, es:

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + (\lambda r^2 - n^2) y(r) = 0. \quad (1.3.2)$$

Deshaciendo el cambio de función, tiene como soluciones las funciones de Bessel $J_n(\sqrt{\lambda}r)$ e $Y_n(\sqrt{\lambda}r)$.

A continuación introduciremos unos resultados relacionados con las derivadas de estas funciones cuando son de orden entero no negativo:

Proposición 1.3.4 (Derivadas de las funciones de Bessel) Sea $\alpha > 0$. Entonces se cumple:

$$(r^n J_n(r))' = r^n J_{n-1}(r) \quad (1.3.3)$$

$$J'_n(\alpha r) = \alpha \left[-J_{n+1}(\alpha r) + \frac{n}{\alpha r} J_n(\alpha r) \right]. \quad (1.3.4)$$

Si tomamos $\alpha = \eta_k$ un cero de $J_n(r)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la expresión (1.3.4) se convierte para $r = 1$ en:

$$J'_n(\eta_k) = -\eta_k J_{n+1}(\eta_k). \quad (1.3.5)$$

Por ultimo, veremos una propiedad muy útil que cumplen las funciones de Bessel en el intervalo $[0, 1]$, la ortogonalidad respecto al peso $w(r) = r$. Asimismo se recoge su demostración, disponible en los Teoremas 4.19 y 4.21 de [12].

Proposición 1.3.5 (Ortogonalidad de las funciones de Bessel) Sean η_{k_1}, η_{k_2} dos ceros de $J_\alpha(r)$, con $\alpha \geq 0$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica:

$$\int_0^1 J_\alpha(\eta_{k_1} r) J_\alpha(\eta_{k_2} r) r dr = \begin{cases} 0 & \text{si } k_1 \neq k_2, \\ \frac{(J_{\alpha+1}(\eta_k))^2}{2} & \text{si } k_1 = k_2 = k \end{cases}$$

y se dice que las funciones de Bessel son ortogonales en $L^2(0, 1)$ con peso $w(r) = r$.

Demostración: Empezaremos probando la ortogonalidad en el caso $k_1 \neq k_2$. Sea $u(r) = J_\alpha(\eta_{k_1} r)$ y $v(r) = J_\alpha(\eta_{k_2} r)$. Por definición, cumplen la ecuación paramétrica de Bessel con parámetro $\sqrt{\lambda} = \eta_{k_1}$ y $\sqrt{\lambda} = \eta_{k_2}$ respectivamente:

$$r^2 u''(r) + r u'(r) + (\eta_{k_1}^2 r^2 - \alpha^2) u(r) = 0, \quad (1.3.6)$$

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + (\eta_{k_2}^2 r^2 - \alpha^2) v(r) = 0. \quad (1.3.7)$$

Realizando $v(r)(1.3.6) - u(r)(1.3.7)$ y dividiendo entre r se llega a:

$$r^2 [u''(r)v(r) - v''(r)u(r)] + r [u'(r)v(r) - v'(r)u(r)] = (\eta_{k_2}^2 - \eta_{k_1}^2) u(r)v(r)r. \quad (1.3.8)$$

Se puede expresar la parte izquierda como la derivada de $r[u'(r)v(r) - v'(r)u(r)]$. Integrando entre 0 y 1:

$$\left[r [u'(r)v(r) - v'(r)u(r)] \right]_0^1 = (\eta_{k_2}^2 - \eta_{k_1}^2) \int_0^1 u(r)v(r)r dr.$$

Como $u(r) = J_\alpha(\eta_{k_1} r)$ y $v(r) = J_\alpha(\eta_{k_2} r)$, estas funciones se anulan en $r = 1$ y $r = 0$ (excepto para $\alpha = 0$, $J_0(0) = 1$, pero debido al factor r se anula en $r = 0$ igualmente) y por tanto el lado izquierdo es nulo. En este caso donde $\eta_{k_1} \neq \eta_{k_2}$, la integral derecha debe ser cero. Es decir,

$$\int_0^1 u(r)v(r)r dr = 0 \quad \text{es decir} \quad \int_0^1 J_\alpha(\eta_{k_1} r) J_\alpha(\eta_{k_2} r) r dr = 0.$$

Para probar el valor de la integral en el caso $k_1 = k_2 = k$, se razona de manera similar utilizando en primer lugar que $u(r) = J_\alpha(\eta_k r)$ cumple:

$$r^2 u''(r) + r u'(r) + (\eta_k^2 r^2 - \alpha^2) u(r) = 0$$

y multiplicando por $2u'(r)$:

$$2r^2 u''(r)u'(r) + 2r(u'(r))^2 + 2(\eta_k^2 r^2 - \alpha^2) u(r)u'(r) = 0.$$

Al igual, expresamos la parte izquierda como una derivada, en este caso, de manera menos intuitiva que antes, de la siguiente expresión:

$$\left[r^2(u'(r))^2 + [\eta_k^2 r^2 - \alpha^2] u^2(r) \right]' - 2\eta_k^2 u^2(r)r = 0.$$

Integrando entre 0 y 1, el valor de integral izquierda se simplifica utilizando que la función $u(r)$ se anula en $r = 0$ y $r = 1$, quedando:

$$(u'(1))^2 = 2\eta_k^2 \int_0^1 u^2(r)rdr$$

y como $u'(1) = J'_\alpha(\eta_k) = -\eta_k J_{\alpha+1}(\eta_k)$ por la ecuación (1.3.5), se simplifica el término η_k^2 . Finalmente, se llega a la expresión final:

$$\frac{J_{\alpha+1}^2(\eta_k)}{2} = \int_0^1 J_\alpha^2(\eta_k r)rdr.$$

A continuación definiremos los polinomios de Legendre.

Definición 1.3.6 (Polinomios de Legendre) Los polinomios de Legendre surgen como soluciones de la ecuación diferencial de Legendre:

$$(1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \mu x(t) = 0. \quad (1.3.9)$$

La obtención de los polinomios de Legendre y las propiedades que se enuncian se pueden encontrar en [12], [14] ó [6]. Esta ecuación tiene soluciones no nulas para valores $\mu = l(l + 1)$ con $l \geq 0$ en el dominio $t \in (-1, 1)$. En el caso particular donde l es entero no negativo, estas soluciones son los denominados polinomios de Legendre $P_l(t)$. Una manera de generar estos polinomios es mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l$$

obteniendo, por ejemplo, $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ ó $P_2(t) = (3t^2 - 1)/2$, siempre cumpliendo $P_l(1) = 1$.

Una ecuación similar a (1.3.9) es la llamada ecuación asociada de Legendre:

$$(1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \left(\mu - \frac{m^2}{1 - t^2} \right) x(t) = 0. \quad (1.3.10)$$

Nuevamente existen soluciones regulares en el intervalo $t \in [-1, 1]$ si y sólo si $\mu = l(l + 1)$ con l y m enteros no negativos $0 \leq m \leq l$. Sus soluciones acotadas en el intervalo $[-1, 1]$ son las llamadas funciones asociadas de Legendre $P_l^m(t)$. Su definición más inmediata se da en función de las derivadas de los polinomios de Legendre, según

$$P_l^m(t) = (-1)^m (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} (P_l(t))$$

y observamos que $P_l^m(t)$ es un polinomio si y sólo si m es par, por lo que en ocasiones se denominan polinomios asociados de Legendre. Por otro lado, cuando m es cero los polinomios asociados coinciden con los polinomios de Legendre, es decir $P_l^0(t) = P_l(t)$.

Frecuentemente se encuentra la ecuación (1.3.10) con el cambio de variable $t = \cos \theta$ debido a sus aplicaciones, entre las cuales se encuentra la resolución de la ecuación de ondas en coordenadas esféricas que estudiaremos en el Capítulo 2. Con este cambio la ecuación diferencial es:

$$x''(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x'(\theta) + \left(l(l + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) x(\theta) = 0 \quad (1.3.11)$$

Por último, estas funciones asociadas son ortogonales en el intervalo $t \in [-1, 1]$. En términos de la variable θ y el intervalo $\theta \in [0, \pi]$, la ortogonalidad, para un m fijo, es la siguiente:

Proposición 1.3.7 (Ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre) Sean $P_l^m(\cos \theta)$ y $P_{l'}^m(\cos \theta)$ dos funciones asociadas de Legendre. Entonces se tiene:

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} = C_l^m & \text{si } l = l', \\ 0 & \text{si } l \neq l'. \end{cases}$$

Por tanto, las funciones asociadas de Legendre $P_l^m(\cos \theta)$ son ortogonales en $\theta \in [0, \pi]$ con peso $w(\theta) = \sin \theta$.

Capítulo 2

Vibraciones en medios homogéneos

En este capítulo nos centraremos en determinar las vibraciones en diversos medios homogéneos, es decir, donde la densidad del medio $1/c^2$ es uniforme. El marco abstracto de estos problemas en medios homogéneos se describió en las Secciones 1.1 y 1.2, donde se enunciaba cómo obtener y resolver el problema de vibraciones, así como los resultados teóricos que aseguraban la unicidad de solución. En dichos resultados teóricos se trabajó con un intervalo temporal acotado $[0, T_0]$ con $T_0 > 0$. Sin embargo, en la práctica podemos tomar T_0 tan grande como queramos, así que se considerará como dominio temporal \mathbb{R}^+ en cada problema.

En cuanto a los medios homogéneos, en primer lugar se ha estudiado las vibraciones en el caso más sencillo, tomando un medio unidimensional: la cuerda. A continuación se han escogido dos medios bidimensionales con diferentes geometrías, una membrana y un anillo circulares. Por último se ha considerado un medio tridimensional: una esfera. El objetivo en este capítulo es obtener de manera explícita los valores y las funciones propias eligiendo estos dominios sencillos, lo cual en el capítulo tercero no se podrá realizar. En el anillo circular no se podrán hallar estos valores propios explícitamente y se sigue un procedimiento similar al que se llevará a cabo en el tercer capítulo. Por tanto, el caso del anillo circular sirve como un nexo entre el tratamiento llevado a cabo en este capítulo y el que se llevará a cabo en el tercero, ya que contiene ideas presentes tanto en la resolución de los problemas en medios homogéneos como en medios compuestos.

Hemos dividido el estudio para cada medio homogéneo en una sección. En todas ellas se formula el problema y se resuelve buscando soluciones a través del método de separación de variables, obteniendo en primer lugar los valores y las funciones propias. Posteriormente se aplican las condiciones iniciales junto a la ortogonalidad de las funciones propias para llegar a la solución del problema de vibraciones. Finalmente se resuelve un ejemplo de vibraciones junto con su representación gráfica, excepto en el último problema del medio tridimensional.

2.1. Vibraciones de una cuerda homogénea

El primer problema a tratar en este capítulo será el caso unidimensional y más sencillo de la ecuación de ondas: las vibraciones de una cuerda homogénea y finita. Este problema es bastante común en la literatura (puede encontrarse en [14] ó [11] entre otros) y sirve como introducción a las ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas.

Así, sea una cuerda elástica de longitud $L > 0$ y densidad constante $1/c^2$ con $c > 0$ sujeta por los extremos (condición de contorno Dirichlet) y de la que se conocen tanto su posición $f(x)$ como su velocidad $g(x)$ en el instante $t = 0$ (condiciones iniciales). Se busca una función $u(x, t)$ que represente la elongación de la cuerda en el punto x de la misma y en el instante de tiempo t sabiendo que su movimiento se produce dentro de un plano.

La formulación matemática de este problema consiste en buscar una función $u(x, t)$ que verifique la ecuación de ondas y ciertas condiciones recogidas en el Problema (2.1.1):

$$\begin{cases} \frac{u_{tt}(x, t)}{c^2} = u_{xx}(x, t) & \text{si } 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{si } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{si } 0 < x < L, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{si } 0 < x < L, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde comparado con el caso general (1.1.3), se tiene $N = 1$ y $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$. Utilizando la separación de variables ahora buscamos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ y obtenemos el problema de valores propios (ver (1.1.6)) :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & \text{si } x \in (0, L), \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

el cual se ha tratado en el Ejemplo 1.2.2. Los valores propios λ_n y funciones propias $X_n(x)$ se describen a continuación:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{y funciones propias} \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{si } x \in (0, L), \ n \in \mathbb{N}, \quad (2.1.2)$$

salvo constante multiplicativa. Las funciones propias $X_n(x)$ forman los modos de vibración de la cuerda, donde cada modo vibra a una determinada frecuencia dada por su valor propio. A partir de estos últimos se puede hallar la velocidad angular ω_n a partir de $\omega_n^2 = c^2 \lambda_n$ y se puede obtener la frecuencia de vibración ν_n , según:

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = c \frac{n}{2L}.$$

Como se puede observar, la frecuencia de vibración aumenta con el modo de vibración. El modo $n = 1$ se denomina modo fundamental de vibración y es aquel con la frecuencia de vibración más baja.

Una vez hallados los valores propios λ_n , resolvemos la ecuación diferencial de $T(t)$ obtenida en la separación de variables, la cual era (1.1.7):

$$T''(t) + \lambda_n c^2 T(t) = 0 \quad \text{para } t > 0.$$

Como los valores propios son estrictamente positivos, el término que multiplica a $T(t)$ también lo es y en consecuencia esta ecuación diferencial tendrá como soluciones combinaciones de senos y cosenos de la forma:

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad \text{si } t > 0, \ a_n, b_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Con las expresiones de $X_n(x)$ y $T_n(t)$, tenemos que las funciones de la forma $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ verifican la ecuación de ondas y las condiciones de contorno del problema (2.1.1). Para satisfacer las condiciones iniciales $f(x)$ y $g(x)$ y haciendo uso de la linealidad de la ecuación de ondas, buscamos como solución del problema (2.1.1) una superposición de estas soluciones $u_n(x, t)$ de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \quad \text{si } x \in (0, L), \ t > 0 \quad (2.1.3)$$

con a_n, b_n por determinar para verificar las condiciones iniciales del problema (2.1.1). De esta manera, tenemos (2.1.4) y (2.1.5):

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{si } x \in (0, L), \quad (2.1.4)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{L}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{si } x \in (0, L) \quad (2.1.5)$$

y utilizando la ortogonalidad de las funciones propias (2.1.2), se pueden hallar las constantes a_n y b_n . Para ello, fijado un $n \in \mathbb{N}$, se parte de las expresiones (2.1.4) y (2.1.5) respectivamente, se multiplica a ambos lados por la función propia $X_n(x)$ y se integra respecto a x en los límites $x = 0$ a $x = L$. Operando, se llega a:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad (2.1.6)$$

$$b_n = \left(\frac{L}{n\pi c}\right) \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad (2.1.7)$$

donde comparando con las expresiones enunciadas en la Observación 1.2.4 para este problema en particular, en los coeficientes b_n se ha incluido el factor $1/\sqrt{\lambda_n}c$. Así, se deben obtener las expresiones de $f(x)$ y $g(x)$ en sus respectivos desarrollos en series de Fourier de las funciones propias $X_n(x)$. Y en consecuencia, la solución del problema (2.1.1) está completamente definida.

A continuación en el Ejemplo 2.1.1 se va a resolver un caso particular de vibraciones de una cuerda homogénea.

Ejemplo 2.1.1 Sea una cuerda con longitud $L = \pi$, con posición inicial $f(x) = x(\pi - x)$ y velocidad inicial $g(x) = x \sin x$, siguiendo la notación de la formulación matemática del problema (2.1.1). Sabemos que su solución es la expresión (2.1.3) con $L = \pi$, a falta de hallar las constantes a_n y b_n con sus respectivas expresiones (2.1.6) y (2.1.7), las cuales son:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^\pi x \sin x \sin(nx) dx = \begin{cases} -\frac{4(1 + (-1)^n)}{\pi c(n^2 - 1)^2} & \text{si } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ \frac{2}{\pi c} \int_0^\pi x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2c} & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

calculando por separado el coeficiente b_1 . Por tanto, la solución de este ejemplo de vibraciones de una cuerda homogénea viene dada por:

$$u(x, t) = \sin x \left[\frac{8}{\pi} \cos(ct) + \frac{\pi}{2c} \sin(ct) \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \sin(nx) \left[\frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \cos(nct) - \frac{4(1 + (-1)^n)}{\pi c(n^2 - 1)^2} \sin(nct) \right] \quad (2.1.8)$$

para $x \in (0, \pi)$ y $t > 0$.

La representación gráfica de la solución del Ejemplo 2.1.1 para un tiempo concreto, en este caso $t = 4$ segundos, se puede observar en la Figura 2.1. Se puede ver el efecto de la velocidad inicial $g(x)$, la cual, a diferencia de la posición inicial $f(x)$, no cumple $g(x) = g(\pi - x)$ y por tanto la elongación máxima de la cuerda no se encuentra en el punto medio del intervalo, $\pi/2$, sino que se encuentra brevemente desplazado con respecto al punto medio. Esta explicación se ve de manera más visual en el archivo cuerda_homo.gif, donde se observan las vibraciones en el intervalo de tiempo $[0, 10]$.

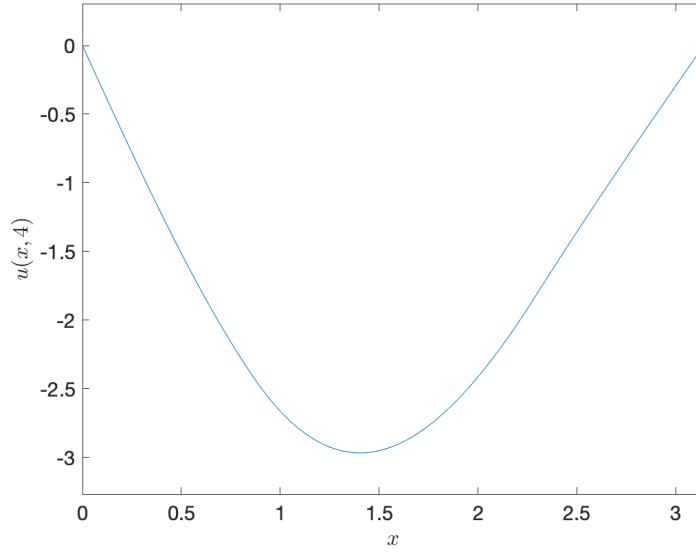


Figura 2.1: Solución del Ejemplo 2.1.1 dado por la expresión (2.1.8), para $c = 1$ y $t = 4$ s.

2.2. Vibraciones de una membrana circular homogénea

En esta sección nos centraremos en la resolución de las vibraciones de una membrana homogénea circular de radio $R_0 > 0$. Problemas similares se pueden encontrar en [12], [14], [5] ó [7], entre otras referencias. Durante su resolución habrá varios aspectos análogos a los descritos en el caso unidimensional, los cuales se comentarán con menos detalle.

El problema bidimensional consiste en encontrar una función $u(x, y, t)$ que describa la elongación de una membrana circular de radio R_0 en cualquier punto de la misma y un instante $t > 0$.

La formulación matemática del problema consiste en encontrar una función $u(x, y, t)$ que verifique la ecuación de ondas bidimensional y ciertas condiciones descritas a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_{tt}(x, y, t)}{c^2} = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) & \text{si } x^2 + y^2 < R_0^2, \ t > 0, \\ u(x, y, t) = 0 & \text{si } x^2 + y^2 = R_0^2, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 < R_0^2, \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 < R_0^2. \end{array} \right.$$

Comparando con el caso general (1.1.3), tenemos que $N = 2$, $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\Omega = B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^2$, siendo $B(0, R_0)$ la bola abierta centrada en el origen y con radio R_0 . Debido a la geometría del dominio Ω , es conveniente introducir el cambio de coordenadas cartesianas $\{x, y\}$ a coordenadas polares $\{r, \theta\}$, el cual se lleva a cabo según las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

siendo el dominio de las nuevas variables $r \in [0, R_0)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$. Una vez realizado el cambio de función $u(x, y)$ a $U(r, \theta)$, se debe hallar el laplaciano Δ_{xy} en coordenadas polares aplicando la Regla de la Cadena a partir de la expresión del Laplaciano en coordenadas cartesianas en (1.1.2). Así, se obtiene el problema (2.2.1) en coordenadas polares para la función $U(r, \theta, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{U_{tt}(r, \theta, t)}{c^2} = U_{rr}(r, \theta, t) + \frac{U_r(r, \theta, t)}{r} + \frac{U_{\theta\theta}(r, \theta, t)}{r^2} & \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U(R_0, \theta, t) = 0 & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U(r, \theta, 0) = F(r, \theta) & \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [-\pi, \pi), \\ U_t(r, \theta, 0) = G(r, \theta) & \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [-\pi, \pi) \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

siendo $F(r, \theta)$ y $G(r, \theta)$ las funciones en coordenadas polares que representan la posición y la velocidad inicial, respectivamente.

Buscamos de nuevo soluciones mediante separación de variables de la forma $U(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación de ondas del problema (2.2.1), dividiendo por $U(r, \theta, t)$ y agrupando, se tiene que:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)/r}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)/r^2}{\Theta(\theta)} = -\lambda \in \mathbb{R} \quad (2.2.2)$$

de donde se puede llegar a una ecuación diferencial para cada variable. Partiendo de la igualdad derecha de la ecuación (2.2.2) multiplicada por r^2 y volviendo a aplicar la técnica de separación de variables, se pueden despejar los términos en θ y r :

$$\begin{aligned} \frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} &= -\lambda r^2 \\ \frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 &= -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tomando ahora como constante μ . Por tanto, a partir de la expresión anterior de las variables espaciales llegamos a la ecuación (2.2.3) y al problema (2.2.4), el cual incluye la condición de contorno $R(R_0) = 0$ obtenida a partir de $0 = U(R_0, \theta, t) = R(R_0)\Theta(\theta)T(t)$:

$$\Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), \quad (2.2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0 \quad \text{si } r \in [0, R_0) \\ R(R_0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

A continuación, resolvemos cada variable por separado.

Resolución para $\Theta(\theta)$

En primer lugar, observamos que $\Theta(\theta)$ debe ser una función periódica con periodo 2π y por consiguiente debe cumplir las condiciones de periodicidad $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$ y $\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$. Así, la función angular $\Theta(\theta)$ verifica el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta \in (-\pi, \pi) \\ \Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \\ \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

el cual es un problema de valores propios con condiciones periódicas bastante común, pudiéndose encontrar en [12] ó [11], por ejemplo. Considerando los diversos casos según el signo de μ , observamos que para valores negativos no se tienen soluciones no nulas, mientras que para $\mu = 0$ se obtienen las soluciones constantes. Por último, el caso $\mu > 0$ da lugar a combinaciones de senos y cosenos de la forma:

$$\Theta(\theta) = a \cos(\sqrt{\mu}\theta) + b \sin(\sqrt{\mu}\theta) \quad \text{si } \theta \in (-\pi, \pi)$$

y junto a las condiciones de contorno y la paridad de las funciones seno y coseno, se llega a

$$a \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \quad \text{y} \quad b \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

Al buscar soluciones no nulas, $a, b \neq 0$, se debe cumplir $\sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0$, es decir, $\sqrt{\mu}$ debe ser un entero positivo. Así, las soluciones son de la forma

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad \text{con } \theta \in [-\pi, \pi), a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \geq 0 \quad (2.2.6)$$

donde hemos incluido las soluciones constantes del caso $\mu = 0$ tomando adicionalmente $n = 0$.

Por último, cabe destacar la ortogonalidad de estas familias de funciones $\{\cos(n\theta)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ y $\{\sin(n\theta)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0, \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0, \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.2.9)$$

Resolución para $R(r)$

En cuanto al problema radial, sustituimos los valores de $\mu = n^2$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en la ecuación diferencial del problema (2.2.4), la cual ahora es:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0 \quad \text{si } r \in [0, R_0). \quad (2.2.10)$$

Esta ecuación diferencial se conoce como la ecuación paramétrica de Bessel de orden $\alpha = n$, tal y como se vio en la ecuación (1.3.2). En consecuencia, las soluciones en el caso $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son combinaciones de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden n , $J_n(\sqrt{\lambda}r)$ y $Y_n(\sqrt{\lambda}r)$ respectivamente:

$$R_n(r) = d_n J_n(\sqrt{\lambda}r) + e_n Y_n(\sqrt{\lambda}r) \quad \text{con } d_n, e_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.2.11)$$

En el estudio de las funciones de Bessel se vio que las funciones de Bessel de segunda especie divergen cuando r tiende a 0. Como buscamos soluciones acotadas (al ser vibraciones de una membrana acotada) tomamos $e_n = 0$ y $d_n = 1$ sin pérdida de generalidad. Aplicando ahora la condición de contorno $R_n(R_0) = 0$ sobre $R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$, se tiene

$$R_n(R_0) = J_n(\sqrt{\lambda}R_0) = 0.$$

Es decir, $\sqrt{\lambda}R_0$ deben ser los ceros positivos de la función de Bessel J_n . Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, los ceros positivos de J_n son un conjunto numerable, denotado por $\{\eta_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Así, se tienen unos λ_{nk} :

$$\sqrt{\lambda_{nk}} R_0 = \eta_{nk}, \quad \text{es decir} \quad \lambda_{nk} = \frac{\eta_{nk}^2}{R_0^2} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}. \quad (2.2.12)$$

Una vez hallados los valores λ_{nk} , las soluciones del problema (2.2.10) son las funciones radiales:

$$R_{nk}(r) = J_n\left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0}\right) \quad \text{con } r \in [0, R_0), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N}. \quad (2.2.13)$$

Notemos que los valores λ_{nk} definidos en (2.2.12) son los valores propios del problema espectral (1.1.6) en el caso $\Omega = B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^2$. Asimismo, el producto de las funciones radiales y angulares forman las funciones propias $X_{nk}(r, \theta) = R_{nk}(r) \Theta_n(\theta)$ de dicho problema de valores propios escrito en coordenadas polares. En este caso son de la forma:

$$X_{nk}(r, \theta) = J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \cos(n\theta) \quad \text{si } n \geq 0, k \geq 1, \quad (2.2.14)$$

$$\tilde{X}_{nk}(r, \theta) = J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \sin(n\theta) \quad \text{si } n, k \geq 1. \quad (2.2.15)$$

Utilizando la Proposición 1.3.5 con el cambio de variable $s = r/R_0$ y las fórmulas (2.2.7)-(2.2.9), es fácil comprobar la ortogonalidad de las funciones $\{X_{nk}\}$ y $\{\tilde{X}_{nk}\}$:

$$\int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} X_{nk}(r, \theta) X_{ml}(r, \theta) r dr d\theta = \begin{cases} \frac{\pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk})}{2} & \text{si } n = m \neq 0, k = l, \\ \pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk}) & \text{si } n = m = 0, k = l, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_{nk}(r, \theta) \tilde{X}_{ml}(r, \theta) r dr d\theta = \begin{cases} \frac{\pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk})}{2} & \text{si } n = m, k = l, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.2.17)$$

$$\int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} X_{nk}(r, \theta) \tilde{X}_{ml}(r, \theta) r dr d\theta = 0 \quad \forall n, m, k, l. \quad (2.2.18)$$

Una vez obtenidas las funciones propias, resolvemos la ecuación diferencial que verifica $T(t)$.

Resolución para $T(t)$

Sustituyendo los valores de λ_{nk} , la ecuación diferencial temporal obtenida por la separación de variables, ver (2.2.2), es:

$$T''(t) + \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} \right)^2 T(t) = 0 \quad \text{con } t > 0.$$

Las soluciones $T_{nk}(t)$ son, al igual que en caso unidimensional de la Sección 2.1, combinaciones de senos y cosenos:

$$T_{nk}(t) = e_{nk} \cos \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) + f_{nk} \sin \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) \quad \text{con } t > 0, e_{nk}, f_{nk} \in \mathbb{R}.$$

Solución final

Sustituyendo las tres expresiones obtenidas de $R_{nk}(r)$, $\Theta_n(\theta)$ y $T_{nk}(t)$, se obtienen las soluciones $U_{nk}(r, \theta, t) = R_{nk}(r)\Theta_n(\theta)T_{nk}(t)$ de la forma:

$$U_{nk}(r, \theta, t) = J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] \left[e_{nk} \cos \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) + f_{nk} \sin \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) \right].$$

Nuevamente gracias a la linealidad de la ecuación de ondas buscamos soluciones que satisfagan las condiciones iniciales del problema bidimensional (2.2.1) como superposición de estas funciones $U_{nk}(r, \theta, t)$:

$$U(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] \left[e_{nk} \cos \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) + f_{nk} \sin \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) \right] \quad (2.2.19)$$

con a_n, b_n, e_{nk}, f_{nk} por determinar, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, estos coeficientes no son únicos, pues se obtiene la misma solución tomando $a_n C, b_n C, e_{nk}/C, f_{nk}/C$, con $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como tenemos dos familias de funciones propias, X_{nk} y \tilde{X}_{nk} , no se llega exactamente a la expresión de la Observación 1.2.4, para lo cual habría que considerar solamente o bien X_{nk} o bien \tilde{X}_{nk} .

Así, para determinar las constantes a partir de las condiciones iniciales del problema, se va a dividir en dos subproblemas P_1 y P_2 cuya diferencia radicar  en las condiciones iniciales. Definimos el problema P_1 como aquel con posición inicial $F(r, \theta)$ y velocidad inicial nula. Asímismo P_2 tendrá posición inicial nula, mientras que su velocidad inicial vendrá dada por $G(r, \theta)$, siendo estas condiciones iniciales las del problema inicial. Debido a la linealidad de la ecuación de ondas, la solución del problema (2.2.1) se puede descomponer como la suma de las soluciones de P_1 y P_2 . Es decir, llamando U_1 y U_2 a las soluciones de P_1 y P_2 respectivamente, se tiene que:

$$U(r, \theta, t) = U_1(r, \theta, t) + U_2(r, \theta, t). \quad (2.2.20)$$

Empezando por P_1 , el cual tiene velocidad inicial nula, a partir de la expresión (2.2.19) se tiene $f_{nk} \equiv 0$ y podemos tomar $e_{nk} \equiv 1$ sin pérdida de generalidad. Así,

$$U_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_{nk}^{(1)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(1)} \sin(n\theta) \right] \cos \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right)$$

donde $a_{nk}^{(1)}$ y $b_{nk}^{(1)}$ son las constantes a determinar usando la condición inicial $F(r, \theta)$ y la ortogonalidad de las funciones propias.

Por tanto, partimos de la condición inicial no nula del problema P_1 :

$$F(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_{nk}^{(1)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(1)} \sin(n\theta) \right].$$

Se va a introducir solamente el procedimiento para obtener $a_{nk}^{(1)}$, ya que para $b_{nk}^{(1)}$ es análogo. Así, para obtener $a_{nk}^{(1)}$ para unos ciertos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos, en primer lugar se multiplica a ambos lados por la función propia $X_{nk}(r, \theta) = J_n(\eta_{nk}r/R_0) \cos(n\theta)$ con peso $w(r) = r$. Posteriormente, se integra en el dominio $\Omega = B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^2$ y debido a la ya mencionada ortogonalidad de las funciones propias, todas las integrales se anulan salvo las correspondientes con los índices n y k . Se llega a la expresión:

$$\int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \theta) X_{nk}(r, \theta) r dr d\theta = a_{nk}^{(1)} \int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} X_{nk}^2(r, \theta) r dr d\theta. \quad (2.2.21)$$

Realizando las integrales del lado derecho de la igualdad anterior utilizando el resultado (2.2.16), se obtienen los coeficientes $a_{nk}^{(1)}$:

$$a_{nk}^{(1)} = \frac{2}{\pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk})} \int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \theta) J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \cos(n\theta) r dr d\theta \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1.$$

Notemos que para $n = 0$ el término 2 del numerador no aparece, según se distinguió en (2.2.16). De manera análoga para $b_{nk}^{(1)}$ pero utilizando la función propia $\tilde{X}_{nk}(r, \theta)$ la cual tiene el término $\sin(n\theta)$:

$$b_{nk}^{(1)} = \frac{2}{\pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk})} \int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \theta) J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \sin(n\theta) r dr d\theta \quad \text{con } n, k \geq 1.$$

Se obtiene la solución U_1 del problema P_1 :

$$U_1(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0k}^{(1)}}{2} J_0 \left(\eta_{0k} \frac{r}{R_0} \right) \cos \left(c \frac{\eta_{0k}}{R_0} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_{nk}^{(1)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(1)} \sin(n\theta) \right] \cos \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right) \quad (2.2.22)$$

donde se ha separado el sumando con $n = 0$ por el factor 2 comentado anteriormente.

Con respecto al problema P_2 , su posición inicial es nula así que tomamos $e_{nk} \equiv 0$ y $f_{nk} \equiv 1$ en la expresión (2.2.19). Nuevamente hallamos los coeficientes correspondientes, en este caso denotados por $a_{nk}^{(2)}$ y $b_{nk}^{(2)}$, de la solución $U_2(r, \theta, t)$ a partir de su condición inicial no nula $G(r, \theta)$:

$$G(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[c \frac{\eta_{nk}}{R_0} \right] J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_{nk}^{(2)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(2)} \sin(n\theta) \right]$$

El procedimiento es similar al efectuado para el problema P_1 para la condición inicial $G(r, \theta)$ en vez de $F(r, \theta)$. Se obtienen los coeficientes $a_{nk}^{(2)}$ y $b_{nk}^{(2)}$:

$$a_{nk}^{(2)} = \frac{R_0}{c\eta_{nk}} \frac{2}{\pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk})} \int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} G(r, \theta) J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \cos(n\theta) r dr d\theta \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1$$

$$b_{nk}^{(2)} = \frac{R_0}{c\eta_{nk}} \frac{2}{\pi R_0^2 J_{n+1}^2(\eta_{nk})} \int_0^{R_0} \int_{-\pi}^{\pi} G(r, \theta) J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \sin(n\theta) r dr d\theta \quad \text{con } n, k \geq 1$$

donde $\{\eta_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ denotan los ceros positivos de la función de Bessel J_n y por tanto, son no nulos. Asimismo el término $R_0/c\eta_{nk}$ resulta de derivar $U(r, \theta, t)$ con respecto al tiempo para utilizar la condición inicial $G(r, \theta)$. En consecuencia, la solución U_2 es:

$$U_2(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0k}^{(2)}}{2} J_0 \left(\eta_{0k} \frac{r}{R_0} \right) \sin \left(c \frac{\eta_{0k}}{R_0} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_{nk}^{(2)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(2)} \sin(n\theta) \right] \sin \left(c \frac{\eta_{nk}}{R_0} t \right).$$

donde nuevamente se muestran los coeficientes $a_{0k}^{(2)}$ por separado. Con U_1 y U_2 , obtenemos la solución del problema (2.2.1) como la superposición de ambas, según se vio en la ecuación (2.2.20).

Por último, vamos a estudiar los modos de vibración de la membrana circular, los cuales vienen dados por las funciones propias $X_{nk}(r, \theta)$ y $\tilde{X}_{nk}(r, \theta)$. Citamos como referencia [13], entre otras. Como ya señalamos anteriormente, las funciones son las soluciones del problema espectral presentado en (1.1.6), en este caso escrito en coordenadas polares $\{r, \theta\}$ y con $\Omega = B(0, R_0)$. Para ello fijamos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ y nos centramos en su correspondiente modo de vibración.

Para hallar los nodos, es decir los puntos cuya oscilación es nula, igualamos a cero el modo de vibración para hallar los valores de r y θ que la anulan. Empezando por los valores de θ que cumplen $X_{nk}(r, \theta) = 0$, tomamos solamente como función angular $\cos(n\theta)$ ya que para el seno las raíces simplemente están desfasadas $\pi/2$. Así, se tiene que

$$\theta = \frac{(2l+1)\pi}{2n}$$

y debido al dominio de $\theta \in [-\pi, \pi]$, solo habrá $2n$ soluciones. Es decir, $2n$ ángulos o direcciones donde la membrana no vibrará, lo cual equivale a n diámetros.

En cuanto a la parte radial se debe cumplir $J_n(\eta_{nk}r/R) = 0$. Teniendo en cuenta que los ceros de la función J_n se denotan como $\eta_{n1} < \eta_{n2} < \dots < \eta_{nk} < \eta_{n(k+1)}$, una solución inmediata es tomar $r = R_0$ pero no es la única. Por ejemplo, también se cumple para el radio r_1 :

$$r_1 = \frac{\eta_{n1}}{\eta_{nk}} R_0 \quad \text{ya que} \quad J_n \left(\frac{\eta_{nk}}{R_0} \frac{\eta_{n1}}{\eta_{nk}} R_0 \right) = J_n(\eta_{n1}) = 0.$$

Este razonamiento nos lleva a pensar que podemos tomar radios similares al anterior con otros ceros de J_n , en lugar de η_{n1} . Sin embargo, la restricción del dominio $r \in (0, R_0)$ implica que debemos tomar los primeros k -ésimos ceros de J_n . Así, los nodos son:

$$r_k = \frac{\eta_{nk'}}{\eta_{nk}} R_0 \quad \text{con } k' < k$$

y por tanto habrá $k - 1$ circunferencias concéntricas de valor $r_k < R_0$ que actuarán como nodos. En conclusión, el modo de vibración (n, k) tendrá n diámetros y $k - 1$ circunferencias concéntricas que no oscilarán.

Por último, cabe mencionar el sentido físico de los valores propios $\lambda_{nk} = \eta_{nk}^2 / R_0^2$. El modo de vibración (n, k) tendrá una velocidad y una frecuencia de vibración ω_{nk} y ν_{nk} respectivamente, dadas por:

$$\begin{cases} \omega_{nk} = \frac{c\eta_{nk}}{R_0} \\ \nu_{nk} = \frac{\omega_{nk}}{2\pi} = \frac{c\eta_{nk}}{2\pi R_0} \end{cases}$$

y a medida que aumenta k , el valor propio λ_{nk} hace lo propio debido a que el conjunto de ceros positivos de J_n , $\{\eta_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$, es una sucesión creciente. Por consiguiente, los modos vibrarán a más velocidad a medida que k aumenta.

Membrana con simetría

Una vez estudiado la membrana circular, ahora nos centraremos en un caso particular pero muy recurrente, donde tanto las condiciones iniciales como la función incógnita son independientes del ángulo θ . Se ha realizado esta distinción debido a que esta situación donde las soluciones no dependen del ángulo es bastante frecuente dentro de las aplicaciones del problema de vibraciones en el campo de la física.

Así, las condiciones iniciales del problema (2.2.1) son en esta ocasión:

$$U(r, \theta, 0) = F(r) \quad \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [-\pi, \pi), \quad (2.2.23)$$

$$U_t(r, \theta, 0) = G(r) \quad \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [-\pi, \pi). \quad (2.2.24)$$

Partiendo de la solución del problema no simétrico (2.2.19) y utilizando la primera condición inicial (2.2.23), se tiene:

$$F(r) = U(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e_{nk} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] \quad (2.2.25)$$

y haciendo uso de la segunda condición inicial (2.2.24):

$$G(r) = U_t(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[c \frac{\eta_{nk}}{R_0} \right] f_{nk} J_n \left(\eta_{nk} \frac{r}{R_0} \right) \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] \quad (2.2.26)$$

Como la parte izquierda tanto de (2.2.25) y (2.2.26) solo dependen del radio, la parte derecha de cada ecuación debe cumplirlo también. Es decir, el factor angular $[a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n\theta)]$ debe ser constante para todo $\theta \in [-\pi, \pi)$, lo cual solo es posible si $n = 0$.

Por otro lado, si las condiciones iniciales son independientes del ángulo θ , cabe esperar que esta condición se conserva con el tiempo y la solución tampoco depende del ángulo θ para $t > 0$. Esto significa que en este caso se buscan soluciones de la forma, escribiendo $U(r, t)$ en lugar de $U(r, \theta, t)$:

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\eta_k \frac{r}{R_0} \right) \left[e_k \cos \left(c \frac{\eta_k}{R_0} t \right) + f_k \sin \left(c \frac{\eta_k}{R_0} t \right) \right] \quad (2.2.27)$$

donde se ha tomado $a_0 = 1$ y el resto de constantes a_n, b_n nulos de la expresión (2.2.19). Las constantes a hallar, e_k y f_k , se obtienen considerando $n = 0$ en la ecuación (2.2.21) y simplificando las integrales en θ :

y procederemos a obtenerlas directamente, sin dividir el problema como en el caso sin simetría. Denotando $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a los ceros positivos de la función de Bessel J_0 , las expresiones (2.2.25) y (2.2.26) se reducen a:

$$e_k = \frac{2}{(R_0 J_1(\eta_k))^2} \int_0^{R_0} F(r) J_0\left(\eta_k \frac{r}{R_0}\right) r dr \quad \text{con } k \geq 1, \quad (2.2.28)$$

$$f_k = \frac{R_0}{c\eta_k} \frac{2}{(R_0 J_1(\eta_k))^2} \int_0^{R_0} G(r) J_0\left(\eta_k \frac{r}{R_0}\right) r dr \quad \text{con } k \geq 1. \quad (2.2.29)$$

Una vez estudiadas las vibraciones de la membrana circular, a continuación se van a resolver dos ejemplos. En el primero se ha estudiado el caso simétrico recién visto, donde las vibraciones de la membrana son independientes del ángulo, mientras que en el segundo ejemplo se han tratado las vibraciones con dependencia en el ángulo θ .

Ejemplo 2.2.1 Sea la membrana con radio unidad $R_0 = 1$, posición inicial $F(r) = (1 - r^2)^2$ y velocidad inicial $G(r) = 5\pi J_0(\eta_7 r)$ siendo $J_0(r)$ la función de Bessel de primera especie y orden cero y η_7 el séptimo cero positivo de dicha función de Bessel $J_0(r)$. Como se ha visto, la solución en el caso simétrico es (2.2.27), siendo ahora $R_0 = 1$ y $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ los ceros positivos de la función de Bessel $J_0(r)$.

Los coeficientes e_k se obtienen a partir de la expresión (2.2.28) con $F(r) = (1 - r^2)^2$, es decir:

$$e_k = \frac{2}{(J_1(\eta_k))^2} \int_0^1 (1 - r^2)^2 J_0(\eta_k r) r dr, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}.$$

Utilizando las fórmulas de recurrencia de las funciones de Bessel vistas en la expresión (1.3.3), se llega a:

$$e_k = \frac{16J_3(\eta_k)}{\eta_k^3 (J_1(\eta_k))^2} \quad \text{con } k \geq 1.$$

En cuanto a f_k , utilizando la Proposición 1.3.5 se tiene que $f_k = 0$ si $k \neq 7$. Con la ecuación (2.2.29) y $k = 7$ se tiene:

$$f_7 = \frac{2 \cdot 5\pi}{c\eta_7 (J_1(\eta_7))^2} \frac{(J_1(\eta_7))^2}{2} = \frac{5\pi}{c\eta_7}.$$

Y la solución del Ejemplo 2.2.1 viene dada por:

$$U(r, t) = \frac{5\pi}{c\eta_7} J_0(\eta_7 r) \sin(c\eta_7 t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16J_3(\eta_k)}{\eta_k^3 (J_1(\eta_k))^2} J_0(\eta_k r) \cos(c\eta_k t). \quad (2.2.30)$$

En la Figura 2.2a se ha representado gráficamente la solución analítica (2.2.30) en el instante $t = 5$ s y con $c = 1$. De manera adicional, se ha resuelto el ejemplo de manera numérica mediante la Toolbox PDETool de Matlab y se ha representado el mismo instante $t = 5$ s en la Figura 2.2b con el fin de poder comparar la solución obtenida mediante ambos métodos. De manera análoga al Ejemplo 2.1.1, se ha representado el movimiento de la membrana en un intervalo de tiempo. Sus oscilaciones se encuentran en el archivo membrana_sim.gif.

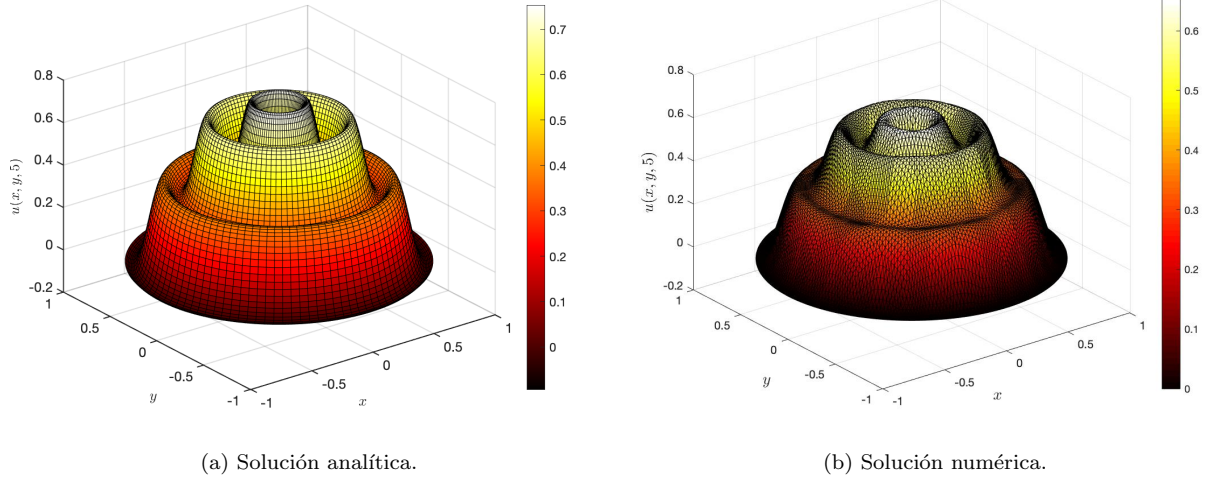


Figura 2.2: Representaciones gráficas de las soluciones analíticas y numéricas del Ejemplo 2.2.1 para el instante $t = 5$ s.

Ejemplo 2.2.2 (Membrana no simétrica) Sea la membrana con radio unidad $R_0 = 1$, posición inicial $F(r, \theta) = J_1(\eta_{1,1}r) \cos \theta$ y velocidad inicial $G(r, \theta) = 0$, es decir, partiendo del reposo. En este caso, el ejemplo se corresponde con el problema P_1 cuya solución es (2.2.22) y al ser la posición inicial $U(r, \theta, 0) = J_1(\eta_{1,1}r) \cos \theta$ una función propia resulta inmediato ver que la única constante no nula será $a_{1,1}^{(1)} = 1$ y en consecuencia la solución del ejemplo del problema no simétrico es:

$$U(r, \theta, t) = J_1(\eta_{1,1}r) \cos \theta \cos(c\eta_{1,1}t). \quad (2.2.31)$$

Nuevamente se han representado la solución analítica (2.2.31) y numérica en la Figura 2.3 para $t = 5$ s y $c = 1$. Se observa la dependencia del término $\cos \theta$ pues la membrana vibra de forma distinta para puntos que equidistan del origen. Igualmente, las oscilaciones de esta solución se encuentran en el archivo *membrana_NOsim.gif*.

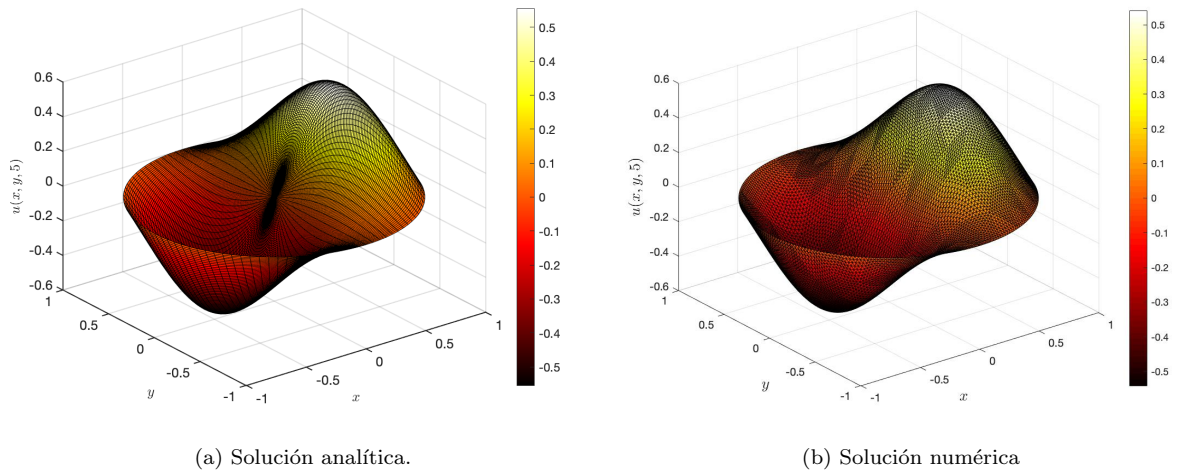


Figura 2.3: Representaciones gráficas de las soluciones analíticas y numéricas del Ejemplo 2.2.2 para el instante $t = 5$ s.

2.3. Vibraciones de un anillo circular homogéneo

En esta sección se va a estudiar otro problema de vibraciones bidimensional en un dominio diferente, un anillo circular con radio de la circunferencia interior $R_1 > 0$ y radio de la circunferencia exterior R_2 ; $0 < R_1 < R_2$. Como referencias incluimos [13].

La formulación matemática del problema es similar al problema de vibraciones de membrana circular (2.2.1), siendo ahora el dominio $\Omega = B(0, R_2) \setminus \overline{B(0, R_1)}$ y las condiciones de contorno correspondientes al cambio de frontera $\partial\Omega$. El problema es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{U_{tt}(r, \theta, t)}{c^2} = U_{rr}(r, \theta, t) + \frac{U_r(r, \theta, t)}{r} + \frac{U_{\theta\theta}(r, \theta, t)}{r^2} & \text{si } r \in (R_1, R_2), \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U(R_1, \theta, t) = U(R_2, \theta, t) = 0 & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U(r, \theta, 0) = F(r, \theta) & \text{si } r \in (R_1, R_2), \theta \in [-\pi, \pi), \\ U_t(r, \theta, 0) = G(r, \theta) & \text{si } r \in (R_1, R_2), \theta \in [-\pi, \pi). \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

Debido a la geometría del nuevo dominio, al buscar soluciones mediante separación de variables $U(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, solamente se verá afectada la resolución en la función radial $R(r)$ con respecto al estudio de la membrana circular. Ahora, en lugar del problema (2.2.4), se tiene que las funciones propias $R(r)$ verifican:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0 & \text{si } r \in (R_1, R_2), \\ R(R_1) = R(R_2) = 0. \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

La solución general de la ecuación diferencial se ha visto con anterioridad (ver (2.2.11)):

$$R_n(r) = d_n J_n(\sqrt{\lambda} r) + e_n Y_n(\sqrt{\lambda} r), \text{ con } d_n, e_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sin embargo, en esta ocasión no descartamos como soluciones a las funciones de Bessel de segunda especie $Y_n(r)$, debido a que su divergencia cuando r tiende a 0 no se encuentra en el dominio actual. Así, las condiciones de contorno son:

$$d_n J_n(\sqrt{\lambda} R_1) + e_n Y_n(\sqrt{\lambda} R_1) = 0, \quad (2.3.3)$$

$$d_n J_n(\sqrt{\lambda} R_2) + e_n Y_n(\sqrt{\lambda} R_2) = 0, \quad (2.3.4)$$

las cuales forman un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas. Como buscamos soluciones distintas de la trivial, tomamos el determinante del sistema nulo, para así obtener infinitas soluciones d_n y e_n y no únicamente las soluciones $d_n = e_n = 0$:

$$F_n(\sqrt{\lambda}) = J_n(\sqrt{\lambda} R_1) Y_n(\sqrt{\lambda} R_2) - J_n(\sqrt{\lambda} R_2) Y_n(\sqrt{\lambda} R_1) = 0. \quad (2.3.5)$$

Se llega a una ecuación trascendente $F_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que es producto y combinación de funciones de Bessel. Se puede probar que esta función tiene un conjunto numerable de ceros positivos, de manera similar a J_n e Y_n . Un ejemplo concreto de esta función se puede observar en la Figura 2.4, apreciándose un carácter semejante a dichas funciones de Bessel.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\sqrt{\lambda_{nk}} = \eta_{nk}$ con $k \in \mathbb{N}$ los ceros positivos de $F_n(\sqrt{\lambda}) = 0$. Ahora podemos obtener los valores d_n y e_n tanto de (2.3.3) como de (2.3.4), tomando por ejemplo:

$$d_n = Y_n(\eta_{nk} R_1) \quad \text{y} \quad e_n = -J_n(\eta_{nk} R_1).$$

Así, obtenemos soluciones para el problema radial (2.3.2) de la forma:

$$R_{nk}(r) = Y_n(\eta_{nk} R_1) J_n(\eta_{nk} r) - J_n(\eta_{nk} R_1) Y_n(\eta_{nk} r) \quad \text{si } r \in (R_1, R_2), \quad (2.3.6)$$

salvo constante multiplicativa.

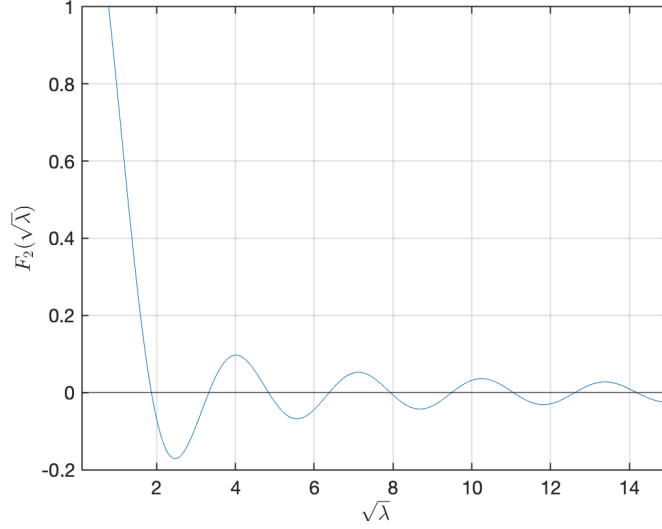


Figura 2.4: Ecuación (2.3.5) correspondiente a $n = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $R_1 = 1$ y $R_2 = 3$.

En consecuencia, tenemos que los valores $\eta_{nk} = \sqrt{\lambda_{nk}}$, ceros de $F_n(\sqrt{\lambda}) = 0$, son los valores propios de (1.1.6) para el caso $\Omega = B(0, R_2) \setminus \overline{B(0, R_1)} \subset \mathbb{R}^2$. Además, las correspondientes funciones propias, escritas en coordenadas polares, vienen dadas por el producto de las nuevas funciones radiales $R_{nk}(r)$ y las angulares $\Theta_n(\theta)$, es decir:

$$\begin{aligned} X_{nk}(r, \theta) &= R_{nk}(r) \cos(n\theta) \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1, \\ \tilde{X}_{nk}(r, \theta) &= R_{nk}(r) \sin(n\theta) \quad \text{con } n, k \geq 1 \end{aligned}$$

Por un resultado similar a la Proposición 1.3.5, tenemos que las funciones radiales $R_{nk}(r)$ son ortogonales en (R_1, R_2) con peso $w(r) = r$ y utilizando (2.2.7)-(2.2.9), es fácil ver la ortogonalidad de las funciones propias $\{X_{nk}\}$ y $\{\tilde{X}_{nk}\}$. En particular se tiene:

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} X_{nk}(r, \theta) X_{ml}(r, \theta) r dr d\theta = \begin{cases} \pi L_{nk} & \text{si } n = m \neq 0, k = l, \\ 2\pi L_{nk} & \text{si } n = m = 0, k = l, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_{nk}(r, \theta) \tilde{X}_{ml}(r, \theta) r dr d\theta = \begin{cases} \pi L_{nk} & \text{si } n = m, k = l, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} X_{nk}(r, \theta) \tilde{X}_{ml}(r, \theta) r dr d\theta = 0 \quad \forall n, m, k, l \quad (2.3.9)$$

donde L_{nk} se corresponde el resultado de la integral radial $L_{nk} = \int_{R_1}^{R_2} R_{nk}^2 r dr$, la cual se puede encontrar en [13] y su valor es:

$$L_{nk} = \left[\frac{r^2}{2} \left(Y_n(\eta_{nk} R_1) J'_n(\eta_{nk} r) - J_n(\eta_{nk} R_1) Y'_n(\eta_{nk} r) \right)^2 \right]_{R_1}^{R_2}. \quad (2.3.10)$$

De manera similar al caso de la membrana, la solución de (2.3.1) se puede escribir como $U = U_1 + U_2$, donde U_1 es dicho problema con condiciones iniciales $F(r, \theta)$ y velocidad inicial nula, y análogamente U_2 tiene posición inicial nula y velocidad inicial $G(r, \theta)$.

Utilizando el procedimiento visto para la membrana con las nuevas funciones $R_{nk}(r)$ y utilizando la

ortogonalidad (2.3.7)-(2.3.9), se tiene U_1 :

$$U_1(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0k}^{(1)}}{2} R_{0k}(r) \cos(c\eta_{0k}t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk}(r) \left[a_{nk}^{(1)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(1)} \sin(n\theta) \right] \cos(c\eta_{nk}t), \quad (2.3.11)$$

donde

$$a_{nk}^{(1)} = \frac{1}{\pi L_{nk}} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \theta) R_{nk}(r) \cos(n\theta) r dr d\theta \quad (2.3.12)$$

y

$$b_{nk}^{(1)} = \frac{1}{\pi L_{nk}} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \theta) R_{nk}(r) \sin(n\theta) r dr d\theta.$$

Por otro lado, la expresión de U_2 es

$$U_2(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0k}^{(2)}}{2} R_{0k}(r) \sin(c\eta_{0k}t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk}(r) \left[a_{nk}^{(2)} \cos(n\theta) + b_{nk}^{(2)} \sin(n\theta) \right] \sin(c\eta_{nk}t), \quad (2.3.13)$$

con

$$a_{nk}^{(2)} = \frac{1}{c\eta_{nk}} \frac{1}{\pi L_{nk}} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} G(r, \theta) R_{nk}(r) \cos(n\theta) r dr d\theta$$

y

$$b_{nk}^{(2)} = \frac{1}{c\eta_{nk}} \frac{1}{\pi L_{nk}} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi}^{\pi} G(r, \theta) R_{nk}(r) \sin(n\theta) r dr d\theta.$$

Por último y como comentario, notar que si consideramos en este dominio el caso simétrico como en la membrana circular, ocurre algo similar. La no dependencia del ángulo θ implica que $n = 0$ para que el factor angular sea constante, tal y como ocurría en la membrana. Por tanto, tendríamos solamente como funciones radiales R_{0k} y como valores propios λ_k que anulan (2.3.5) para $n = 0$.

Una vez estudiadas las vibraciones de un anillo circular, se va a resolver un ejemplo del mismo.

Ejemplo 2.3.1 Sea el anillo de radios $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, con posición inicial $F(r, \theta) = r(r^4 - 5r^2 + 4) \sin(\theta)$ y velocidad inicial nula. Debido a esto último, los coeficientes $a_{nk}^{(2)}$ y $b_{nk}^{(2)}$ son nulos y la solución será de la forma de U_1 , donde solamente debemos hallar $a_{nk}^{(1)}$ y $b_{nk}^{(1)}$. Por otro lado, como $F(r, \theta)$ es proporcional a $\sin(\theta)$, los coeficientes $a_{nk}^{(1)}$ son a su vez cero por la ortogonalidad de las funciones $\cos(n\theta)$ y $\sin(n\theta)$ vista en (2.2.9). Esto significa que solo debemos hallar las constantes $b_{nk}^{(1)}$ pero al valernos nuevamente del término $\sin \theta$ de $F(r, \theta)$, las únicas constantes no nulas son aquellas con $n = 1$. Como la expresión de $b_{nk}^{(1)}$ viene dada por (2.3.12) para las funciones propias $\sin(n\theta)$, para $n = 1$ será:

$$b_{1k}^{(1)} = \frac{1}{L_{1k}} \int_1^2 r(r^4 - 5r^2 + 4) R_{1k}(r) r dr$$

donde se ha sustituido el valor de la integral angular $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \pi$. El valor L_{1k} se corresponde con (2.3.10) para $n = 1$ y los valores de $R_1 = 1$, $R_2 = 2$. Por otro lado, la función $R_{1k}(r)$ es en este caso:

$$R_{1k}(r) = Y_1(\eta_{1k}) J_1(\eta_{1k}r) - J_1(\eta_{1k}) Y_1(\eta_{1k}r).$$

Para resolver la integral anterior se hace uso de las fórmulas de recurrencia de las funciones de Bessel, tanto de primera como de segunda especie, vistas en la Proposición 1.3.4. Como la función $R_{1k}(r)$ es una combinación lineal de $J_n(\eta_{1k}r)$ y $Y_n(\eta_{1k}r)$, las fórmulas de recurrencia se pueden aplicar a dicha función y se obtiene un valor de la integral radial, denotada I_{nk} :

$$I_{nk} = \int_1^2 r(r^4 - 5r^2 + 4) R_{1k}(r) r dr = \left[8r^4 \tilde{R}_{4k}(r) - (4r^2 - 10)r^3 \tilde{R}_{3k}(r) \right]_1^2$$

denotando por $\tilde{R}_{nk}(r)$ a las sucesivas funciones obtenidas mediante las fórmulas de recurrencia a partir de R_{1k} :

$$\tilde{R}_{nk}(r) = Y_1(\eta_{1k})J_n(\eta_{1k}r) - J_1(\eta_{1k})Y_n(\eta_{1k}r).$$

Cabe observar la diferencia de esta función con $R_{nk}(r)$, pues el subíndice n no afecta a todos los términos. Así, se obtiene un valor de los coeficientes $b_{1k}^{(1)}$:

$$b_{1k}^{(1)} = \frac{I_{nk}}{L_{1k}}$$

y como estamos ante un caso del problema U_1 , a partir de la solución (2.3.11), la solución del Ejemplo 2.3.1 es:

$$U(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k}^{(1)} R_{1k}(r) \sin(\theta) \cos(c\eta_{1k}t) \quad (2.3.14)$$

siendo $\{\eta_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ las raíces positivas de (2.3.5) para $n = 1$. Nuevamente se ha representado la solución anterior y la solución obtenida numéricamente. Las oscilaciones se pueden observar en el archivo `anillo_movie.gif`.

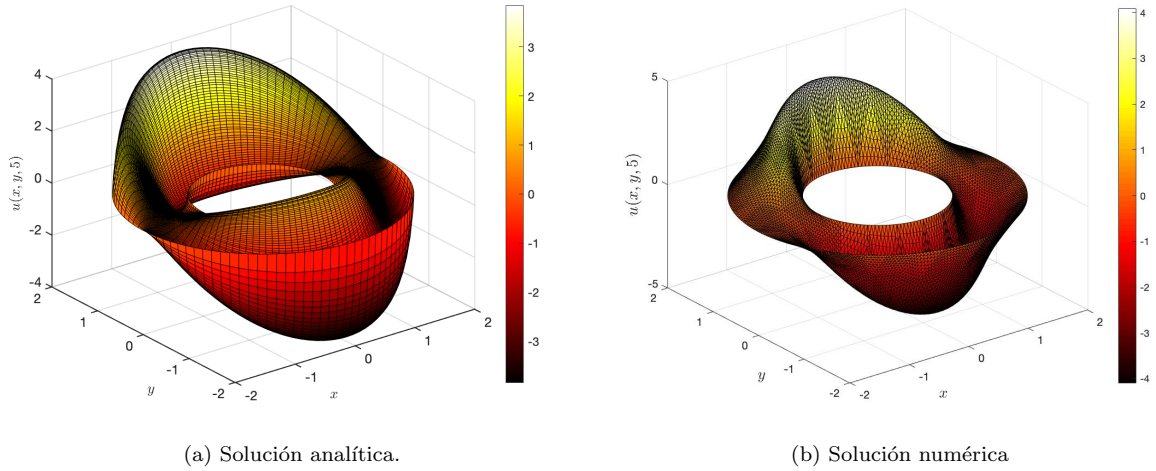


Figura 2.5: Representaciones gráficas de las soluciones analíticas y numéricas del Ejemplo 2.3.1 para el instante $t = 5$ s.

2.4. Vibraciones de una esfera homogénea

Por último, se va a estudiar un caso tridimensional de la ecuación de ondas, donde el medio propagador de ondas en esta ocasión será una esfera homogénea de radio R_0 . De manera similar al caso bidimensional, si ahora el dominio es una esfera, $\Omega = B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$, es conveniente realizar un cambio de variable a coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$, según:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

donde $r \in [0, R_0]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Al igual que con las coordenadas polares, la expresión del laplaciano se ve afectado por este cambio a coordenadas esféricas. Se puede encontrar por ejemplo en [11] y para una función $U(r, \theta, \phi)$ es:

$$\Delta U_{r\theta\phi} = \nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

el cual desarrollando las derivadas se expresa también como:

$$\Delta U_{r\theta\phi} = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}.$$

Por tanto, el problema tridimensional consiste en hallar la función $U(r, \theta, \phi, t)$ que describa las vibraciones de una esfera sujeta en el borde a partir de su posición y velocidad iniciales. Su formulación matemática es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{U_{tt}(r, \theta, \phi, t)}{c^2} = \Delta U_{r\theta\phi} & \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi), t > 0, \\ U(R_0, \theta, \phi, t) = 0 & \text{si } \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi), t > 0, \\ U(r, \theta, \phi, 0) = F(r, \theta, \phi) & \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi), \\ U_t(r, \theta, \phi, 0) = G(r, \theta, \phi) & \text{si } r \in [0, R_0), \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi) \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

donde $F(r, \theta, \phi)$ y $G(r, \theta, \phi)$ son funciones conocidas. Una vez más aplicamos separación de variables para buscar soluciones de la forma $U(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación de ondas y dividiendo entre $U(r, \theta, \phi, t)$ se obtiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{2}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -\lambda.$$

Tomando la expresión de la parte derecha, podemos separar la variable r multiplicando por r^2 , hallando:

$$\frac{2rR'(r)}{R(r)} + \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\cot \theta \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \mu. \quad (2.4.2)$$

Y se puede obtener la ecuación diferencial que verifica $R(r)$, la cual es:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0 \quad \text{si } r \in [0, R_0). \quad (2.4.3)$$

Volviendo a la expresión (2.4.2), se opera la parte de la derecha multiplicando por $\sin^2 \theta$:

$$\cos \theta \sin \theta \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + \sin^2 \theta \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \mu \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \gamma.$$

La ecuación en $\Phi(\phi)$ es sencilla de obtener:

$$\Phi''(\phi) + \gamma \Phi(\phi) = 0 \quad \text{si } \phi \in [0, 2\pi), \quad (2.4.4)$$

mientras que para la variable θ se llega a la siguiente ecuación:

$$\sin^2 \theta \Theta''(\theta) + \cos \theta \sin \theta \Theta'(\theta) + (\mu \sin^2 \theta - \gamma) \Theta(\theta) = 0$$

o de manera equivalente dividiendo entre $\sin^2 \theta$:

$$\Theta''(\theta) + \cot \theta \Theta'(\theta) + \left(\mu - \frac{\gamma}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta \in [0, \pi]. \quad (2.4.5)$$

Por último, la ecuación diferencial que verifica $T(t)$ es:

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad \text{si } t > 0$$

y nuevamente resolvemos cada variable por separado.

Resolución para $\Phi(\phi)$

La ecuación (2.4.4) ya ha aparecido en la resolución la membrana circular, en (2.2.5). Al representar la variable ϕ el ángulo de colatitud en coordenadas esféricas, cumple las condiciones de periodicidad. Los valores propios son $\gamma_n = n^2$ y sus correspondientes funciones angulares Φ_n son:

$$\Phi_n(\phi) = a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi) \quad \text{si } \phi \in [0, 2\pi),$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Resolución para $\Theta(\theta)$

Sustituyendo el valor $\gamma_n = n^2$ en la ecuación (2.4.5), se llega a:

$$\Theta''(\theta) + \cot \theta \Theta'(\theta) + \left(\mu - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0, \quad \text{si } \theta \in [0, \pi],$$

conocida como la ecuación asociada de Legendre para la variable θ , vista en (1.3.11). Como se vio en la Sección 1.3, tiene soluciones regulares $\cos \theta \in [-1, 1]$, si y sólo si $\mu = l(l+1)$, con $0 \leq n \leq l$ y tiene como soluciones acotadas a las funciones asociadas de Legendre P_l^n , obteniendo:

$$\Theta_{nl}(\theta) = P_l^n(\cos \theta) \quad \text{si } \theta \in [0, \pi],$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \geq n$.

Resolución para $R(r)$

Sustituyendo los valores de $\mu = l(l+1)$ en la ecuación (2.4.3) se obtiene una ecuación similar a la ecuación de Bessel vista en el problema de la membrana circular:

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) + [\lambda r^2 - l(l+1)] R(r) = 0 \quad \text{si } r \in [0, R_0).$$

Esta ecuación se puede reducir a la ecuación de Bessel esférica mediante el cambio de variable $s = \sqrt{\lambda}r$:

$$s^2 \tilde{R}''(s) + 2s \tilde{R}'(s) + [s^2 - l(l+1)] \tilde{R} = 0$$

donde $R(r) = \tilde{R}(s)$. Las soluciones son las llamadas funciones esféricas de Bessel de orden l de primera y segunda especie j_l y y_l , que se pueden expresar en función de las funciones de Bessel $J_{l+1/2}$ y $Y_{l+1/2}$ mediante:

$$\begin{aligned} j_l(s) &= \sqrt{\frac{\pi}{2s}} J_{l+1/2}(s), \\ y_l(s) &= \sqrt{\frac{\pi}{2s}} Y_{l+1/2}(s). \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Debido a estas relaciones, nuevamente $y_l(s)$ diverge en el límite cuando s tiende a 0, por lo que tomamos como soluciones solamente las funciones esféricas de Bessel de primera especie j_l , es decir: $R_l = j_l(\sqrt{\lambda}r)$.

La ecuación (2.4.6) implica que, a partir de propiedades que presentan las funciones de Bessel $J(r)$, se pueden derivar aquellas análogas las funciones esféricas gracias a esta relación directa. Además, las expresiones de j_l son más sencillas que las funciones de Bessel, pudiéndose obtener de manera recurrente a partir de

$$j_l(s) = (-s)^l \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right)^l \frac{\sin s}{s}. \tag{2.4.7}$$

Para hallar los valores propios λ , se utiliza la condición de contorno obtenida mediante la separación de variables: $R(R_0) = 0$. Su aplicación es similar a la efectuada en el caso de la membrana circular, llegando los siguientes valores y funciones:

$$\lambda_{lk} = \frac{\eta_{lk}^2}{R_0^2} \quad \text{y} \quad R_{lk}(r) = j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) \quad \text{si } r \in [0, R_0),$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \geq n$, $k \in \mathbb{N}$. Aquí, $\{\eta_{lk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es el conjunto de ceros positivos de la función esférica de Bessel j_l , el cual nuevamente es un conjunto numerable.

Notemos que λ_{lk} son los valores propios del problema (1.1.3) para $\Omega = B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$. Las funciones propias de dicho problema en coordenadas esféricas son el producto de las funciones espaciales $X_{nlk}(r, \theta, \phi) = R_{lk}(r)\Theta_{nl}(\theta)\Phi_n(\phi)$, de la forma:

$$\begin{aligned} X_{nlk}(r, \theta, \phi) &= j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \cos(n\phi) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \geq n \text{ y } k \in \mathbb{N}, \\ \tilde{X}_{nlk}(r, \theta, \phi) &= j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \sin(n\phi) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, l \geq n \text{ y } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De manera similar, veremos que funciones propias $\{X_{nlk}\}$ y $\{\tilde{X}_{nlk}\}$ son ortogonales. En primer lugar, para las funciones $\Phi(\phi)$ se ha visto anteriormente en el caso la membrana, recogidas en (2.2.7)-(2.2.9) para la variable ϕ . En cuanto a las funciones de Bessel esféricas, se tiene la siguiente identidad:

$$\int_0^{R_0} j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) j_{l'} \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) r^2 dr = \begin{cases} R_0^3 \frac{j_{l+1}^2(\eta_{lk})}{2} & \text{si } l = l', \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

la cual se puede obtener a partir de la ortogonalidad de las funciones de Bessel J_n y la expresión (2.4.6). Por último, la ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre $P_l^n(\cos \theta)$ para 2 funciones con n fijo, se vio en la Proposición 1.3.7 y se denota por C_l^n . Juntando estos tres resultados, es sencillo ver que se cumple:

$$\int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_{nlk}(r, \theta, \phi) X_{n'l'k'}(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \begin{cases} \pi C_l^n R_0^3 \frac{j_{l+1}^2(\eta_{lk})}{2} & \text{si } n = n' \neq 0, l = l', k = k' \\ \pi C_l^n R_0^3 j_{l+1}^2(\eta_{lk}) & \text{si } n = n' = 0, l = l', k = k' \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.4.8)$$

$$\int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{X}_{nlk}(r, \theta, \phi) \tilde{X}_{n'l'k'}(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \begin{cases} \pi C_l^n R_0^3 \frac{j_{l+1}^2(\eta_{lk})}{2} & \text{si } n = n', l = l', k = k', \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.4.9)$$

$$\int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_{nlk}(r, \theta, \phi) \tilde{X}_{n'l'k'}(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = 0 \quad \forall n, n', l, l', k, k'. \quad (2.4.10)$$

Una vez descrita la ortogonalidad de las funciones propias X_{nlk} y \tilde{X} , obtenemos la expresión de la función $T(t)$.

Resolución para $T(t)$

Con los valores de λ_{lk} obtenidos, la ecuación diferencial a resolver es:

$$T''(t) + \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right)^2 T(t) = 0 \quad \text{si } t > 0,$$

la cual ya ha aparecido en anteriores problemas. Sus soluciones son:

$$T_{lk}(t) = e_{lk} \cos \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) + f_{lk} \sin \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) \quad \text{si } t > 0, \quad e_{lk}, f_{lk} \in \mathbb{R}.$$

Solución final

Agrupando las diferentes funciones obtenidas, las soluciones básicas son:

$$U_{n,l,k}(r, \theta, \phi, t) = R_{lk}(r) \Theta_{nl}(\theta) \Phi_n(\phi) T_{lk}(t) = j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \left[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi) \right] \left[e_{lk} \cos \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) + f_{lk} \sin \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) \right].$$

De igual manera, buscamos como solución una superposición de estas soluciones básicas:

$$U(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n,l,k} j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \left[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi) \right] \left[e_{lk} \cos \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) + f_{lk} \sin \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) \right],$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \geq n$ y $k \in \mathbb{N}$.

Las constantes se hallan a partir de las condiciones iniciales $F(r, \theta, \phi)$ y $G(r, \theta, \phi)$, siguiendo una idea semejante a los casos bidimensionales de la membrana y anillo circulares. Se divide el problema (2.4.1) en dos subproblemas. El primero, cuya solución denotamos por U_1 , tiene con posición inicial $F(r, \theta, \phi)$ y parte desde el reposo, y el segundo, con solución U_2 , tiene posición inicial nula y velocidad inicial $G(r, \theta, \phi)$. La expresión de U_1 es:

$$U_1(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n,l,k} j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \cos \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) \left[a_{nlk}^{(1)} \cos(n\phi) + b_{nlk}^{(1)} \sin(n\phi) \right]$$

Para hallar, por ejemplo, los coeficientes $b_{nlk}^{(1)}$, utilizamos la condición inicial $F(r, \theta, \phi) = U_1(r, \theta, \phi, 0)$ y para unos n, l, k fijos, se multiplica a ambos lados por la función propia $\tilde{X}_{nlk}(r, \theta, \phi)$ con peso $w(r, \theta) = r^2 \sin \theta$. Haciendo uso de las expresiones (2.4.8)-(2.4.10), se llega a:

$$b_{nlk}^{(1)} = \frac{1}{\pi C_l^n} \frac{2}{R_0^3 j_{l+1}^2(\eta_{lk})} \int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(r, \theta, \phi) j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \sin(n\phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (2.4.11)$$

De manera similar con la función propia X_{nlk} , se obtienen los coeficientes $a_{nlk}^{(1)}$:

$$a_{nlk}^{(1)} = \frac{1}{\pi C_l^n} \frac{2}{R_0^3 j_{l+1}^2(\eta_{lk})} \int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(r, \theta, \phi) j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \cos(n\phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.4.12)$$

y siguiendo un argumento similar al efectuado en ejemplos anteriores, cuando $n = 0$ los coeficientes $a_{0lk}^{(1)}$ no presentan el factor 2 en el numerador.

Con respecto a la solución U_2 , ésta es de la forma:

$$U_2(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n,l,k} j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \cos \left(c \frac{\eta_{lk}}{R_0} t \right) \left[a_{nlk}^{(1)} \cos(n\phi) + b_{nlk}^{(1)} \sin(n\phi) \right].$$

con coeficientes, obtenidos de manera análoga a (2.4.12) y (2.4.11):

$$a_{nlk}^{(2)} = \frac{R_0}{c \eta_{lk}} \frac{1}{\pi C_l^n} \frac{2}{R_0^3 j_{l+1}^2(\eta_{lk})} \int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G(r, \theta, \phi) j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \cos(n\phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.4.13)$$

y

$$b_{nlk}^{(2)} = \frac{R_0}{c \eta_{lk}} \frac{1}{\pi C_l^n} \frac{2}{R_0^3 j_{l+1}^2(\eta_{lk})} \int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G(r, \theta, \phi) j_l \left(\frac{\eta_{lk}}{R_0} r \right) P_l^n(\cos \theta) \sin(n\phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

El factor $\frac{R_0}{c \eta_{lk}}$ se ha obtenido al derivar la función solución con respecto al tiempo.

Como comentario respecto al peso $w(r, \theta) = r^2 \sin \theta$, se obtiene a partir de las funciones esféricas de Bessel y los polinomios asociados de Legendre. Mientras que los primeros son ortogonales respecto al peso r^2 , los segundos lo son respecto al peso $\sin \theta$. Sin embargo, este peso $w(r, \theta)$ también puede interpretarse como el determinante de la matriz jacobiana como resultado del cambio de variable a coordenadas esféricas. En los dominios circulares bidimensionales ocurre algo similar con las coordenadas polares, donde el peso era $w(r) = r$ correspondiente a la ortogonalidad de las funciones de Bessel y coincidente con el determinante del jacobiano al pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

Por último, vamos a mostrar un ejemplo de vibraciones de una esfera homogénea.

Ejemplo 2.4.1 Sea la esfera unidad homogénea con posición inicial $F(r, \theta, \phi)$ nula y velocidad inicial $G(r, \theta) = (1 - r)(1/3 + 2 \cos \theta)$.

Por un lado, $F(r, \theta, \phi) = 0$ así que el término temporal de $U(r, \theta, \phi, t)$ será $\sin(c\eta_{lk}t)$ y la solución vendrá dada por U_2 . Esto significa solo hay que obtener los coeficientes $a_{nlk}^{(2)}$ y $b_{nlk}^{(2)}$. Por otro lado, como la velocidad inicial no depende del ángulo ϕ , ocurre una situación similar a la vista en las vibraciones de la membrana simétrica. Para que la solución sea independiente del ángulo ϕ , las funciones $\Phi(\phi)$ deben ser constantes, lo cual solo se logra con $n = 0$ y por tanto solo se deben obtener los coeficientes correspondientes la función propia $\cos(n\phi)$ para $n = 0$, es decir, se debe hallar $a_{0lk}^{(2)}$.

La expresión de estos coeficientes se definió en (2.4.13). En este caso son:

$$a_{0lk}^{(2)} = \frac{1}{c\eta_{lk}} \frac{1}{\pi C_l^0} \frac{2}{j_{l+1}^2(\eta_{lk})} 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi G(r, \theta) j_l(\eta_{lk}r) P_l(\cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (2.4.14)$$

donde se ha sustituido el valor de la integral en ϕ , que para $n = 0$ es $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$.

Comenzamos por la integral en el ángulo θ , la cual define los valores de $l \geq 0$ para los cuales los coeficientes son no nulos. Para ello integramos la parte de $G(r, \theta)$ que depende de dicho ángulo, llamando a la integral I_l :

$$I_l = \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} + 2 \cos \theta \right) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + 2x \right) P_l(x) dx$$

mediante el cambio de variable $x = \cos \theta$. Estas integrales I_l no están relacionados con los coeficientes de la expresión del polinomio $1/3 + 2x$ como combinación de polinomios de Legendre. Al ser el polinomio de grado 1, se necesitarán 2 polinomios de Legendre: $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, por tanto las únicas integrales no nulas son para $l = 0$ y $l = 1$, siendo sus valores $I_{l=0} = 2/3$ y $I_{l=1} = 4/3$.

Es decir, los únicos coeficientes no nulos son, de momento, los de la forma $a_{00k}^{(2)}$ y $a_{01k}^{(2)}$. Para obtener la integral radial, distinguimos los casos de l no nulos:

Integral radial $l = 0$

La integral radial a hallar es

$$I_k^{(0)} = \int_0^1 (1 - r) j_0(\eta_{0k}r) r^2 dr$$

siendo $\{\eta_{0k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ los ceros positivos de $j_0(r)$. Utilizando la fórmula de recurrencia (2.4.7) se tiene que $j_0(s) = \sin s/s$, lo cual simplifica la integración, obteniendo:

$$I_k^{(0)} = \frac{2 - 2 \cos(\eta_{0k}) - \eta_{0k} \sin(\eta_{0k})}{\eta_{0k}^4} = \frac{2(1 - (-1)^k)}{(k\pi)^4}. \quad (2.4.15)$$

Obteniendo la expresión final utilizando que $\{\eta_{0k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ son los ceros de $j_0(s)$, es decir: $\eta_{0k} = k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$.

Integral radial $l = 1$

La integral en esta ocasión es:

$$I_k^{(1)} = \int_0^1 (1-r) j_1(\eta_{1k} r) r^2 dr$$

con $j_1(s) = \frac{\sin s}{s^2} - \frac{\cos s}{s}$ y $\{\eta_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sus ceros positivos. Por tanto, cumplen $\sin(\eta_{1k}) = \eta_{1k} \cos(\eta_{1k})$. Se obtiene:

$$I_k^{(1)} = \frac{2\eta_{1k} - 3 \sin(\eta_{1k}) + \eta_{1k} \cos(\eta_{1k})}{\eta_{1k}^4} = \frac{2(1 - \cos(\eta_{1k}))}{\eta_{1k}^3}. \quad (2.4.16)$$

Y en consecuencia ya tenemos los coeficientes $a_{00k}^{(2)}$ y $a_{01k}^{(2)}$.

Empezando por los primeros, a partir de (2.4.14) para $l = 0$:

$$a_{00k}^{(2)} = \frac{1}{c\eta_{0k}} \frac{1}{\pi C_0^0} \frac{2}{j_1^2(\eta_{0k})} 2\pi I_{l=0} I_k^{(0)} = \frac{8(1 - (-1)^k)}{3c(k\pi)^3}$$

pues $j_1^2(\eta_{0k}) = j_1^2(k\pi) = 1/(k\pi)^2$. Además se han sustituido $C_0^0 = 2$, $I_{l=0} = 2/3$ y la integral radial $I_k^{(0)}$ de (2.4.15).

Por otro lado, los coeficientes $a_{01k}^{(2)}$ valen:

$$a_{01k}^{(2)} = \frac{1}{c\eta_{1k}} \frac{1}{\pi C_1^0} \frac{2}{j_2^2(\eta_{1k})} 2\pi I_{l=1} I_k^{(1)} = \frac{4(1 - \cos(\eta_{1k}))}{c j_2^2(\eta_{1k}) \eta_{1k}^4},$$

sustituyendo $C_1^0 = 2/3$, $I_{l=1} = 4/3$ y la integral radial $I_k^{(1)}$ de (2.4.16). Como se observa, no podemos dar una expresión igual de sencilla que $a_{01k}^{(2)}$ debido a que no se tiene una expresión analítica de los ceros de $j_1(r)$ $\{\eta_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

La solución final será

$$U(r, \theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(1 - (-1)^k)}{3c(k\pi)^3} j_0(\eta_{0k} r) \sin(c\eta_{0k} t) + \frac{4(1 - \cos(\eta_{1k}))}{c j_2^2(\eta_{1k}) \eta_{1k}^4} j_1(\eta_{1k} r) \cos \theta \sin(c\eta_{1k} t).$$

Capítulo 3

Vibraciones en medios compuestos

Este capítulo trata sobre modelos matemáticos que describen las vibraciones en medios compuestos por materiales con distintas características físicas. Así, entenderemos un medio compuesto como aquel cuerpo que ocupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que contiene dos regiones disjuntas Ω_1 y Ω_2 con frontera común entre ellos $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \emptyset$ una variedad $N - 1$ dimensional, de manera que $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ y $\partial\Omega = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \Gamma$. Por ejemplo, consideramos $\Omega_1 = B(0, R_1) \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega_2 = B(0, R_2) \setminus \overline{B(0, R_1)} \subset \mathbb{R}^2$ y Γ la circunferencia centrada en el origen y radio R_1 .

Supondremos que cada región tiene una densidad diferente, dadas por sus respectivas constantes $1/c_1^2$ y $1/c_2^2 > 0$. Se puede resumir esta heterogeneidad mediante:

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/c_1^2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1/c_2^2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Al igual que en el caso homogéneo, consideramos que el medio se encuentra sujeto en el borde y que se conocen tanto su posición como velocidad inicial, $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})$ respectivamente. Como novedad respecto al caso homogéneo, añadiremos ciertas condiciones de transmisión en la frontera Γ común entre las regiones Ω_1 y Ω_2 .

Así, consideramos el problema mixto que consiste en buscar una función $u(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^2(\Omega \times \mathbb{R})$ que verifique la ecuación de ondas con ciertas constantes relacionadas con las densidades en cada región y ciertas condiciones, de manera que describa las vibraciones en un medio compuesto de dos regiones Ω_1 y Ω_2 con diferentes densidades, dadas mediante (3.0.1). La formulación matemática es:

$$\left\{ \begin{array}{lll} c(\mathbf{x})u_{tt}(\mathbf{x}, t) = \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \ t > 0, & \text{Ec. de Ondas,} \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \ t > 0, & \text{Condición de Contorno,} \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, & \text{Condición Inicial I,} \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, & \text{Condición Inicial II,} \\ [u(\mathbf{x}, t)] = \left[\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n} \right] = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \ t > 0, & \text{Condiciones de Transmisión,} \end{array} \right. \quad (3.0.2)$$

donde n representa el vector normal exterior a Γ y los corchetes el salto de la función y de la derivada en Γ , es decir, entre ambas regiones. Asimismo, $f(\mathbf{x})$ es la posición inicial y $g(\mathbf{x})$ la velocidad inicial.

El esquema a seguir es similar al efectuado en los problemas homogéneos, pero con algunas diferencias que describiremos en este capítulo. Al realizar la separación de variables $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$, el término $c(\mathbf{x})$ se debe introducir en la parte espacial de la separación de variables, a diferencia del caso homogéneo donde era indiferente y se colocaba en la ecuación $T(t)$. Así, se llega al problema de valores propios asociado al problema (3.0.2):

$$\begin{cases} \Delta X(\mathbf{x}) + \lambda c(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ X(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ [X(\mathbf{x})] = [\frac{\partial X(\mathbf{x})}{\partial n}] = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.0.3)$$

Una vez definidos el problema de vibraciones en medios compuestos y su problema de valores propios asociado, se procederá en la Sección 3.1, de manera análoga al caso homogéneo, a introducir una serie de resultados necesarios para asegurar la existencia y unicidad de solución al problema (3.0.2).

3.1. Marco abstracto para un medio compuesto

En esta sección se enunciarán algunas de las propiedades necesarias para asegurar la existencia y unicidad de solución del problema de vibraciones en medios compuestos (3.0.2), de manera similar al efectuado para el problema de vibraciones homogéneo en la Sección 1.2. Como referencias incluimos algunas de las ya mencionadas en el anterior marco abstracto, como [8] ó [3], y referencias sobre sistemas compuestos como [10] ó [9]. Asimismo, se verán algunos conceptos ideas semejantes a aquellas vistas en el marco abstracto homogéneo.

Varias definiciones introducidas por primera vez en la Sección 1.2 aparecen de nuevo, por lo que solamente se tratarán las novedades respecto al marco abstracto para medios homogéneos.

Ahora, tomaremos $H = L_c^2(\Omega)$, siendo $L_c^2(\Omega)$ el espacio de las funciones L^2 con peso $c(\mathbf{x})$ y su producto escalar es:

$$(u, v)_{L_c^2(\Omega)} = \int_{\Omega} c(\mathbf{x})uv \, d\mathbf{x} = \frac{1}{c_1^2} \int_{\Omega_1} uv \, d\mathbf{x} + \frac{1}{c_2^2} \int_{\Omega_2} uv \, d\mathbf{x}.$$

Asímismo, definimos $V = H_0^1(\Omega)$ con su producto escalar usual. De nuevo se tiene $V \subset H$ con inclusión densa y compacta. A continuación hallaremos la formulación débil del problema (3.0.2), partiendo de la ecuación de ondas y multiplicando por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$. Integrando en Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(\mathbf{x})u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \frac{1}{c_1^2} \int_{\Omega_1} u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{c_2^2} \int_{\Omega_2} u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_1} \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

donde se ha separado la integral izquierda teniendo en cuenta la función $c(\mathbf{x})$ definida en (3.0.1). Utilizando la identidad de Green a cada integral del lado derecho, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1^2} \int_{\Omega_1} u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{c_2^2} \int_{\Omega_2} u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega_1} v(\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) \, dS - \int_{\Omega_1} \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \nabla v \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_2} v(\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) \, dS - \int_{\Omega_2} \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \nabla v \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Las integrales en los bordes $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ se anulan por dos motivos. El primero se debe a que v es un elemento de $H_0^1(\Omega)$ y por tanto se anula en $\partial\Omega$. Sin embargo, esta condición no cubre la frontera entre ambas regiones $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. El segundo motivo tiene que ver con las condiciones de transmisión, donde se enunció que $[\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n}] = 0$ si $x \in \Gamma$, siendo n el vector normal exterior a Γ . Matemáticamente significa que los vectores normales exteriores \mathbf{n} de Ω_1 y Ω_2 apuntan en direcciones opuestas y en consecuencia, ambas integrales tienen signo opuesto en Γ , anulándose.

Así, obtenemos:

$$\frac{1}{c_1^2} \int_{\Omega_1} u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{c_2^2} \int_{\Omega_2} u_{tt}(\mathbf{x}, t)v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \nabla v \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1.3)$$

En este punto, realizamos nuevamente la identificación entre la función incógnita de (3.0.2) con una función unidimensional $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C([0, T_0]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_0]; L^2(\Omega))$. Es decir, para cada $t \in [0, T_0]$ la imagen $\mathbf{u}(\cdot, t)$ es un elemento de $H_0^1(\Omega)$ y su derivada $\mathbf{u}_t(\cdot, t)$ es un elemento de $L^2(\Omega)$.

Para expresar la ecuación (3.1.3) en su formulación débil tomamos como forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x}. \quad (3.1.4)$$

Ahora podemos reescribir la expresión (3.1.3) en términos de la forma bilineal y del producto escalar de $L^2(\Omega)$. Así, el problema (3.0.2) en su formulación débil consiste en hallar una función $u(\cdot, t) \in C([0, T_0]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_0]; L^2(\Omega))$ tal que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(\cdot, t), v \right)_{L_c^2(\Omega)} + a(\mathbf{u}(\cdot, t), v) = 0 & \text{si } 0 < t < T_0, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = f, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\cdot, 0) = g. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

donde $f \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$. El problema de valores propios asociado a (3.1.5) se obtiene de manera similar al caso homogéneo. Buscando soluciones mediante separación de variables de la forma $u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$, se llega al problema de valores propios $-\Delta X = \lambda c(\mathbf{x})X$. Escribimos su formulación débil, nuevamente multiplicando por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando en Ω :

$$-\int_{\Omega} \Delta X v \, d\mathbf{x} = \frac{\lambda}{c_1^2} \int_{\Omega_1} X v \, d\mathbf{x} + \frac{\lambda}{c_2^2} \int_{\Omega_2} X v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.1.6)$$

donde se ha dividido la integral derecha en las dos regiones. De nuevo haciendo uso de la identidad de Green, la integral izquierda se convierte en:

$$\int_{\Omega} \nabla X \nabla v \, d\mathbf{x} = \frac{\lambda}{c_1^2} \int_{\Omega_1} X v \, d\mathbf{x} + \frac{\lambda}{c_2^2} \int_{\Omega_2} X v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.1.7)$$

y llegamos a la formulación débil del problema de valores propios. En efecto, tenemos en el lado izquierdo $a(X, v)$ definido en (3.1.4) y en el lado derecho el producto escalar en $L_c^2(\Omega)$ con el valor propio λ . Así el problema consiste en hallar los λ y $X \in H_0^1(\Omega)$ no nulos para los cuales se cumple:

$$a(X, v) = \lambda(X, v)_{L_c^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1.8)$$

Como $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal continua y coerciva y se cumplen las hipótesis del Teorema 1.2.1, el cual garantiza que los valores propios $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman un conjunto numerable de valores propios que tienden a ∞ y que las correspondientes funciones propias $\{X_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base ortogonal en $L_c^2(\Omega)$.

Siguiendo el mismo esquema que la Sección 1.2 e introduciendo los cambios oportunos, se tienen los siguientes resultados de existencia y unicidad de solución del problema (3.1.5) (comparar con Teoremas 1.2.3 y 1.2.5).

Teorema 3.1.1 *Si u es una solución del problema (3.1.5), entonces es de la forma:*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(f, X_n)_{L_c^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L_c^2(\Omega)}} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{(g, X_n)_{L_c^2(\Omega)}}{(X_n, X_n)_{L_c^2(\Omega)}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right] X_n \quad (3.1.9)$$

Teorema 3.1.2 (Existencia y unicidad) *El problema (3.1.5) tiene una única solución u que depende únicamente de las condiciones iniciales f y g . Más aún, existe una constante C independiente de f y g tal que:*

$$\|u\|_{C([0, T_0]; H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{C^1([0, T_0]; L_c^2(\Omega))} \leq C(\|f\|_{H_0^1(\Omega)} + \|g\|_{L_c^2(\Omega)}). \quad (3.1.10)$$

A conitnuación se van a tratar dos problemas de medios compuestos en dominios sencillos. En primer lugar, un caso unidimensional: una cuerda que se compone de dos regiones con distinta densidad. Posteriormente se abordará un caso bidimensional: las vibraciones de una membrana circular formada por dos regiones concéntricas, igualmente con distinta densidad.

3.2. Vibraciones de una cuerda compuesta

En esta sección estudiaremos el problema unidimensional sobre vibraciones de una cuerda unidimensional compuesta de dos materiales de distinta densidad. Problemas de vibraciones unidimensionales similares se pueden encontrar, por ejemplo, en [8] ó [10], donde se estudian sistemas con una masa concentrada, entre ellos el caso unidimensional.

En este caso, hemos considerado Ω el intervalo $(0, L_2)$ y como regiones $\Omega_1 = (0, L_1)$ y $\Omega_2 = (L_1, L_2)$, con $0 < L_1 < L_2$ constantes arbitrarias. Para este ejemplo, las condiciones de transmisión se aplican en la frontera entre ambas regiones, es decir, en el punto $x = L_1$.

La formulación matemática del problema consiste en encontrar una función que satisfaga la ecuación de ondas en cada medio, así como ciertas condiciones. Como novedad se observan las condiciones de transmisión, donde se exige que tanto la función $u(x, t)$ como la derivada $u_x(x, t)$ sean continuas en la frontera común de ambas regiones $x = L_1$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_1^{-2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \text{si } 0 < x < L_1, \ t > 0, \\ c_2^{-2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \text{si } L_1 < x < L_2, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(L_2, t) = 0 & \text{si } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{si } 0 < x < L_2, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{si } 0 < x < L_2, \\ u(L_1^-, t) = u(L_1^+, t) & \text{si } t > 0, \\ u_x(L_1^-, t) = u_x(L_1^+, t) & \text{si } t > 0 \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones conocidas.

Buscando por separación de variables soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ se llega al problema de valores propios asociado al anterior problema de vibraciones (3.2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda c(x)X(x) = 0 \quad \text{si } x \in (0, L_2), \\ X(0) = X(L_2) = 0, \\ X(L_1^-) = X(L_1^+), \\ X'(L_1^-) = X'(L_1^+). \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Debido al término $c(x)$ el cual depende de $\Omega_1 = (0, L_1)$ o $\Omega_2 = (L_1, L_2)$, se va a resolver cada región por separado. Una vez tengamos las expresiones de $X(x)$ en cada región, aplicaremos las condiciones de transmisión para obtener las funciones propias.

Para la región $(0, L_1)$ el problema es:

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda c_1^{-2}X(x) = 0 \quad \text{si } x \in (0, L_1), \\ X(0) = 0, \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son de la forma:

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda c_1^{-1}}x) \quad \text{si } x \in (0, L_1) \quad (3.2.3)$$

con $a \in \mathbb{R}$. Por otro lado, para la región (L_1, L_2) se tiene el problema:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda c_2^{-2} X(x) = 0 & \text{si } x \in (L_1, L_2), \\ X(L_2) = 0, \end{cases}$$

con soluciones de la forma:

$$X(x) = b \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} x) + d \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} x) \quad \text{si } x \in (L_1, L_2).$$

Para hallar los valores de $b, d \in \mathbb{R}$ aplicamos la condición de contorno $X(L_2) = 0$, es decir:

$$b \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} L_2) + d \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} L_2) = 0$$

para lo cual tomando $b = \tilde{d} \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} L_2)$ y $d = -\tilde{d} \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} L_2)$ con $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ se obtienen las soluciones en (L_1, L_2) de la forma:

$$X(x) = \tilde{d} \left[\sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} L_2) \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} x) - \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} L_2) \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} x) \right] \quad \text{si } x \in (L_1, L_2).$$

Mediante el seno de la diferencia se puede reescribir la expresión anterior de manera más sencilla:

$$X(x) = \tilde{d} \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} (L_2 - x)) \quad \text{si } x \in (L_1, L_2). \quad (3.2.4)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.2.3) y (3.2.4) y aplicando las condiciones de transmisión se llega a un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas a y \tilde{d} :

$$\begin{cases} a \sin(\sqrt{\lambda} c_1^{-1} L_1) - \tilde{d} \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} (L_2 - L_1)) = 0, \\ a c_1^{-1} \cos(\sqrt{\lambda} c_1^{-1} L_1) + \tilde{d} c_2^{-1} \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} (L_2 - L_1)) = 0. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Como queremos obtener funciones $X(x)$ distintas de la trivial, debemos encontrar valores de a y \tilde{d} no nulos. Para ello, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema lineal debe ser nulo, obteniendo una ecuación trascendente $F(\sqrt{\lambda}) = 0$:

$$F(\sqrt{\lambda}) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} c_1^{-1} L_1) \cos(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} (L_2 - L_1)) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} c_1^{-1} L_1) \sin(\sqrt{\lambda} c_2^{-1} (L_2 - L_1)) = 0. \quad (3.2.6)$$

Esta ecuación tiene infinitas raíces positivas, lo cual se puede observar realizando la gráfica de la ecuación, tomando ciertos valores para las constantes c_1 , c_2 , L_1 y L_2 como recoge la Figura 3.3. Con dichas raíces positivas, denotadas $\{\sqrt{\lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, podemos obtener los valores propios de problema (3.2.2): $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

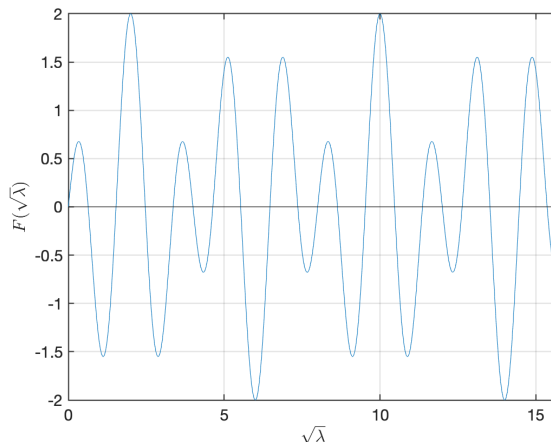


Figura 3.1: Gráfica de la función $F(\sqrt{\lambda})$ descrita en (3.2.6) para los valores $c_1 = 1/2$, $c_2 = 2$, $L_1 = \pi/2$ y $L_2 = \pi$.

Para cada valor propio λ_n , podemos tomar $a = a_n$ y $\tilde{d} = \tilde{d}_n$ de la forma:

$$\begin{aligned} a_n &= \sin(\sqrt{\lambda_n} c_2^{-1} (L_2 - L_1)) && \text{con } n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{d}_n &= \sin(\sqrt{\lambda_n} c_1^{-1} L_1) && \text{con } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

para que verifiquen el sistema lineal (3.2.5). Finalmente, llegamos a las funciones propias $X_n(x)$:

$$X_n(x) = \begin{cases} K \sin(\sqrt{\lambda_n} c_2^{-1} (L_2 - L_1)) \sin(\sqrt{\lambda_n} c_1^{-1} x) & \text{si } x \in (0, L_1), \\ K \sin(\sqrt{\lambda_n} c_1^{-1} L_1) \sin(\sqrt{\lambda_n} c_2^{-1} (L_2 - x)) & \text{si } x \in (L_1, L_2). \end{cases} \quad (3.2.7)$$

con $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Una vez halladas las funciones propias, para mostrar su comportamiento se han realizado distintas representaciones gráficas de una misma función propia X_n en la Figura 3.2, para distintos valores de los parámetros c_1 , c_2 , y L_1 . Para ello se ha fijado una longitud total $L_2 = \pi$ y se han tomado diferentes combinaciones de las constantes L_1 , c_1 y c_2 con el fin de observar el efecto de cada una de ellas en la función propia y en cada una de las regiones. Notar que el valor de L_1 define ambas regiones $(0, L_1)$ y (L_1, L_2) , la primera con longitud L_1 y la segunda con $\pi - L_1$, al fijar el valor $L_2 = \pi$.

Así, se han ido alternando valores similares y diferentes de intervalos de las regiones $(0, L_1)$ y (L_1, L_2) por un lado, y c_1 y c_2 por otro lado. En cada caso se ha tomado como valor propio el segundo cero positivo de (3.2.6), es decir $\sqrt{\lambda_2}$ correspondiente a $n = 2$. Es decir, el valor propio ha sido λ_2 y la función propia $X_2(x)$. Debido a las condiciones de contorno $X(0) = X(L_2) = 0$ que afectan a ambas regiones por igual, se obtienen gráficas similares si se permutan las constantes c_1 y c_2 y las longitudes de los intervalos $(0, L_1)$ y (L_1, L_2) . De este modo, se ha tomado $(0, L_1)$ como región menos densa en las Figuras 3.2a-3.2d.

Las cuatro gráficas de la Figura 3.2 presentan casos distintos. Si en la Figura 3.2a se observan valores similares tanto de las longitudes de los intervalos como de las densidades, en la Figura 3.2b se varía solamente la longitud del intervalo. En las Figuras 3.2c las regiones están claramente diferenciadas debido a la elección de las constantes c_1 y c_2 , para regiones de igual longitud. Por último, la Figura 3.2d resume el caso donde tanto las longitudes de las regiones como las densidades son muy distintas.

Como se ha dicho anteriormente, se comenzó representando valores similares de densidades en la Figura 3.2a, siendo el cociente $c_1/c_2 = 2.5$ y los intervalos de longitudes iguales. La amplitud de la función propia es menor para esta combinación de valores, si bien ambas regiones presentan varias oscilaciones. En la Figura 3.2b solamente se ha variado la longitud de las regiones, siendo en este segundo caso $(0, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi)$.

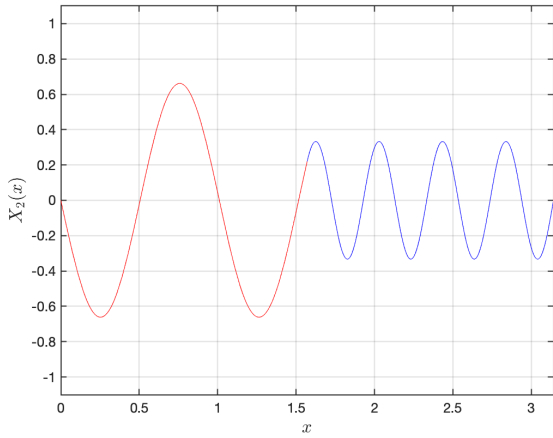
Analizando las gráficas 3.2a y 3.2b, se observa cómo los máximos y mínimos de cada región no se ven afectados por el cambio de longitud. Es decir, en la Figura 3.2a la región azul (L_1, L_2) presenta cuatro mínimos en el intervalo $(\pi/2, \pi)$, los cuales conserva en Figura 3.2b en dicho intervalo, si bien cambia la amplitud de ellos. De igual manera para la región $(0, L_1)$, se observa que el mínimo presente en $(0, 0.5)$ aparece en ambas Figuras 3.2a-3.2b.

Por otro lado, se aprecia el efecto de la densidad en cada medio. En la Figura 3.2a el medio más denso, $(\pi/2, \pi)$, presenta mayor número de oscilaciones que el menos denso $(0, \pi/2)$ para la misma longitud de intervalo. Entrando brevemente en la interpretación física de las oscilaciones de la cuerda, significa que el medio más denso tiene una longitud de onda menor, entendiendo la longitud de onda como la distancia entre dos puntos con mismas características, como por ejemplo, dos máximos o mínimos. En consecuencia, el medio más denso presenta mayor número de oscilaciones que el medio menos denso en un intervalo de igual longitud.

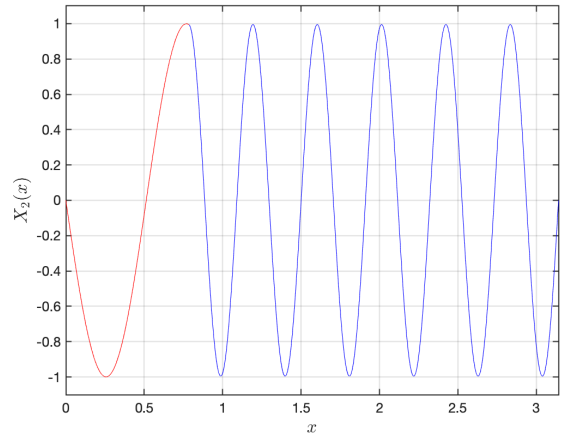
En las Figuras 3.2c-3.2d se tomaron nuevas densidades en cada medio. En ambos casos los cocientes son similares, siendo $c_1/c_2 = 25$ y $c_1/c_2 = 20$, respectivamente. Estos cocientes, mucho mayor que el tomado en las figuras anteriores, implica que se aprecie una mayor diferencia entre ambas regiones. En ambas

gráficas la región azul presenta más oscilaciones que la región roja.

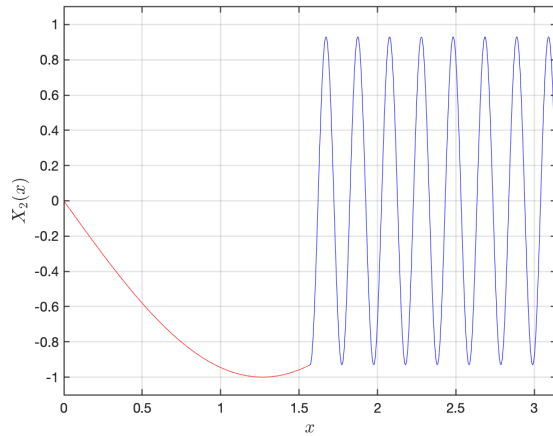
En concreto, se observa que en la región $(0, \pi/2)$ de la Figura 3.2c la longitud de onda es mucho mayor, habiendo solamente un extremo relativo mientras que la región $(\pi/2, \pi)$ presenta hasta quince. La diferencia se acentúa más en la Figura 3.2d, donde se ha tomado una región siete veces mayor que la otra. Sin embargo, la región de menor longitud $(7\pi/8, \pi)$ tiene más extremos relativos que la región $(0, 7\pi/8)$, debido a la gran diferencia entre las constantes c_1 y c_2 .



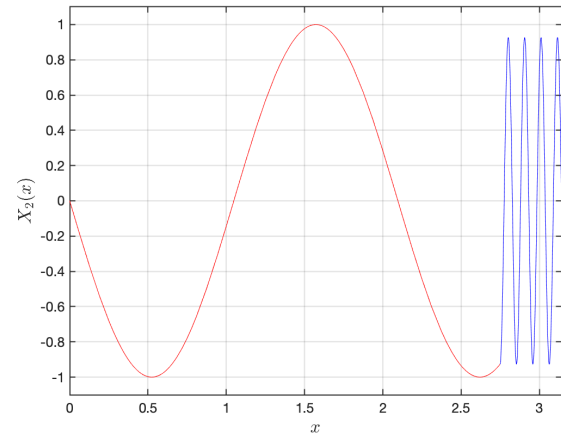
(a) Función propia $X_2(x)$ para $L_1 = \pi/2$, $c_1 = 0.05$ y $c_2 = 0.02$. El segundo cero de (3.2.6) es $\sqrt{\lambda_2} \approx 0.3108$, y por tanto el valor propio es $\lambda_2 \approx 0.0966$.



(b) Función propia $X_2(x)$ para $L_1 = \pi/4$, $c_1 = 0.05$ y $c_2 = 0.02$. El segundo cero de (3.2.6) es $\sqrt{\lambda_2} \approx 0.3063$, y por tanto el valor propio es $\lambda_2 \approx 0.0938$.



(c) Función propia $X_2(x)$ para $L_1 = \pi/2$, $c_1 = 0.25$ y $c_2 = 0.01$. El segundo cero de (3.2.6) es $\sqrt{\lambda_2} \approx 0.3099$, y por tanto el valor propio es $\lambda_2 \approx 0.0960$.



(d) Función propia $X_2(x)$ para $L_1 = 7\pi/8$, $c_1 = 0.1$ y $c_2 = 0.005$. El segundo cero de (3.2.6) es $\sqrt{\lambda_2} \approx 0.2997$, y por tanto el valor propio es $\lambda_2 \approx 0.0898$.

Figura 3.2: Representaciones gráficas de $X_2(x)$ para diferentes densidades c_1 y c_2 así como tamaño de cada región $(0, L_1)$ y (L_1, L_2) . En rojo se muestra la región $(0, L_1)$ y en azul, (L_1, L_2) . Las animaciones se pueden encontrar en el archivo adjunto.

Observación 3.2.1 Notemos que si tomamos el caso específico $c_1 = c_2 = 1$ debemos recuperar los valores y funciones propias del problema de vibraciones de una cuerda homogénea de longitud L visto en el problema (1.1.6). Denotando $L_2 = L$, la ecuación que verifican los valores propios (3.2.6) se convierte, utilizando el seno de la suma:

$$F(\sqrt{\lambda}) = \sin(\sqrt{\lambda}(L_1 + L - L_1)) = 0, \quad \text{es decir} \quad \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

y los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, las funciones propias descritas en (3.2.7) se pueden expresar con $c_2 = c_1 = 1$:

$$X_n(x) = \begin{cases} K \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \left[\sin(\sqrt{\lambda_n} L) \cos(\sqrt{\lambda_n} L_1) - \cos(\sqrt{\lambda_n} L) \sin(\sqrt{\lambda_n} L_1) \right] & \text{si } x \in (0, L_1) \\ K \sin(\sqrt{\lambda_n} L_1) \left[\sin(\sqrt{\lambda_n} L) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) - \cos(\sqrt{\lambda_n} L) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \right] & \text{si } x \in (L_1, L) \end{cases}$$

con $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Utilizando que $\sin(\sqrt{\lambda_n} cL) = 0$, la expresión se simplifica a:

$$X_n(x) = \tilde{K}_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \quad \text{si } x \in (0, L),$$

con $\tilde{K}_n = -K \sin(\sqrt{\lambda_n} L_1) \cos(\sqrt{\lambda_n} L)$. Por tanto, recuperamos los valores y funciones propias de caso homogéneo, recogidas en (2.1.2).

Por último, a partir de las condiciones iniciales $f(x)$ y $g(x)$ se puede calcular la solución escribiendo las condiciones iniciales en términos de la base ortogonal de funciones propias $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y obteniendo los coeficientes de Fourier tanto de $f(x)$ como de $g(x)$. A diferencia del Capítulo 2 donde se describía explícitamente la obtención de estos coeficientes y su posterior cálculo en los ejemplos, en este capítulo no se entrará en detalle aunque el proceso sea similar.

No obstante, podemos considerar los casos particulares donde las condiciones iniciales son funciones propias, es decir, si fijamos un $n \in \mathbb{N}$ y tomamos $f(x) = aX_n(x)$ y $g(x) = 0$ con a no nulo o por el contrario $f(x) = 0$ y $g(x) = bX_n(x)$ con b no nulo, se obtienen las llamadas soluciones estacionarias:

$$u(x, t) = aX_n(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \quad \text{y} \quad u(x, t) = \frac{b}{\sqrt{\lambda_n}} X_n(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} t),$$

respectivamente.

3.3. Vibraciones de una membrana circular compuesta

Continuando con los problemas compuestos y como último caso a estudiar, en esta sección nos centraremos en las vibraciones de una membrana compuesta de dos materiales de distinta densidad. Problemas similares sobre vibraciones de una membrana compuesta de dos medios se pueden encontrar en [9] ó [8]. Así, consideramos que $\Omega = B(0, R_2)$ y como regiones $\Omega_1 = B(0, R_1)$ y $\Omega_2 = B(0, R_2) \setminus \overline{B(0, R_1)}$, con $0 < R_1 < R_2$ constantes arbitrarias. De forma similar a la membrana circular homogénea, escribimos el problema en coordenadas polares, de manera que la heterogeneidad se puede expresar según:

$$c(r) = \begin{cases} 1/c_1^2 & \text{si } r \in [0, R_1), \\ 1/c_2^2 & \text{si } r \in (R_1, R_2). \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Por último, comentar que las condiciones de transmisión se definen en frontera común entre ambas regiones, es decir, los puntos de radio $r = R_1$. La formulación matemática en coordenadas polares es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_1^{-2} U_{tt}(r, \theta, t) = \Delta U_{r\theta}(r, \theta, t) & \text{si } r \in [0, R_1), \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ c_2^{-2} U_{tt}(r, \theta, t) = \Delta U_{r\theta}(r, \theta, t) & \text{si } r \in (R_1, R_2), \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U(R_2, \theta, t) = 0 & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U(r, \theta, 0) = F(r, \theta) & \text{si } r \in [0, R_2), \theta \in [-\pi, \pi), \\ U_t(r, \theta, 0) = G(r, \theta) & \text{si } r \in [0, R_2), \theta \in [-\pi, \pi), \\ U(R_1^-, \theta, t) = U(R_1^+, \theta, t) & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), t > 0, \\ U_r(R_1^-, \theta, t) = U_r(R_1^+, \theta, t) & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), t > 0. \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

Buscando soluciones de la forma $U(r, \theta, t) = X(r, \theta)T(t)$ mediante la separación de variables se llega al problema de valores propios:

$$\begin{cases} \Delta X(r, \theta) + \lambda c(r)X(r, \theta) = 0 & \text{si } r \in [0, R_2), \theta \in [-\pi, \pi), \\ X(R_2, \theta) = 0, & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), \\ X(R_1^-, \theta) = X(R_1^+, \theta), X_r(R_1^-, \theta) = X_r(R_1^+, \theta) & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi), \\ X(r, -\pi) = X(r, \pi), X_\theta(r, -\pi) = X_\theta(r, \pi) & \text{si } r \in [0, R_2) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

donde $c(r)$ está dado por (3.3.1). De manera similar al caso homogéneo, buscamos soluciones a partir de la separación de variables: $X(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) &= 0 & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi) \\ r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda c(r)r^2 - \mu) R(r) &= 0 & \text{si } r \in [0, R_2). \end{aligned}$$

Por un lado, la ecuación diferencial angular no se ha visto afectada por la heterogeneidad de la membrana y por tanto, junto con las condiciones de contorno periódicas, sus soluciones no se ven afectadas, siendo las mismas que la membrana homogénea recogidas en (2.2.6), donde se tomó $\mu = n^2$, $n \geq 0$.

Por otro lado, para la ecuación que verifica $R(r)$, separamos nuevamente el problema en ambas regiones. En la región $[0, R_1)$ se tiene el problema, para cada $n \geq 0$:

$$r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) + (\lambda_n c_1^{-2} r^2 - n^2) R_n(r) = 0 \quad \text{si } r \in [0, R_1).$$

Imponiendo que las vibraciones estén acotadas, las soluciones vendrán dadas por las funciones de Bessel de primera especie J_n , ya que Y_n diverge cuando r tiende a 0:

$$R_n(r) = d_n J_n(\sqrt{\lambda_n c_1^{-1}} r) \quad \text{si } r \in [0, R_1)$$

con $d_n \in \mathbb{R}$.

Para la región (R_1, R_2) , el problema es:

$$\begin{cases} r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) + (\lambda_n c_2^{-2} r^2 - n^2) R_n(r) = 0 & \text{si } r \in (R_1, R_2), \\ R_n(R_2) = 0. \end{cases}$$

Ahora las soluciones vienen dadas por las funciones de Bessel tanto de primera como de segunda especie:

$$R_n(r) = e_n J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} r) + f_n Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} r)$$

sujetas a la condición de contorno $R_n(R_2) = 0$:

$$e_n J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) + f_n Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) = 0.$$

Tomando $e_n = \tilde{e}_n Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2)$ y $f_n = \tilde{e}_n J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2)$ con $\tilde{e}_n \in \mathbb{R}$, se obtienen las soluciones de la forma:

$$R_n(r) = \tilde{e}_n \left[Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} r) - J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} r) \right] \quad \text{si } r \in (R_1, R_2).$$

Aplicando las condiciones de transmisión $R_n(R_1^-) = R_n(R_1^+)$ y $R_n'(R_1^-) = R_n'(R_1^+)$, se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} d_n J_n(\sqrt{\lambda_n c_1^{-1}} R_1) - \tilde{e}_n \left[Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_1) - J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_1) \right] = 0, \\ d_n J_n'(\sqrt{\lambda_n c_1^{-1}} R_1) - \tilde{e}_n \left[Y_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) J_n'(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_1) - J_n(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_2) Y_n'(\sqrt{\lambda_n c_2^{-1}} R_1) \right] = 0 \end{cases}$$

donde se pueden sustituir las derivadas de las funciones de Bessel a partir de la expresión vista en (1.3.4), siendo una de ellas:

$$J'_n(\sqrt{\lambda_n}c_1^{-1}R_1) = \sqrt{\lambda_n}c_1^{-1} \left[-J_{n+1}(\sqrt{\lambda_n}c_1^{-1}R_1) + \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}c_1^{-1}R_1} J_n(\sqrt{\lambda_n}c_1^{-1}R_1) \right] \quad (3.3.4)$$

y análogamente tomando la constante c_2 en lugar de c_1 o la función Y_n en lugar de J_n . Tomamos el determinante del sistema nulo para obtener soluciones distintas de la trivial. Se llega a la siguiente ecuación:

$$F_n(\sqrt{\lambda_n}) = J_n(\sqrt{\lambda_n}c_1^{-1}R_1) \left[Y_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_2)J'_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_1) - J_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_2)Y'_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_1) \right] - J'_n(\sqrt{\lambda_n}c_1^{-1}R_1) \left[Y_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_2)J_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_1) - J_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_2)Y_n(\sqrt{\lambda_n}c_2^{-1}R_1) \right] = 0 \quad (3.3.5)$$

Así se tiene $F_n(\sqrt{\lambda_n})$ definida como combinaciones de las funciones de Bessel de primera y segunda especie y para cada $n \geq 0$ la ecuación tiene infinitas raíces positivas, denotadas $\{\sqrt{\lambda_{nk}}\}_{k \in \mathbb{N}}$, a partir de las cuales se obtienen los valores propios $\{\lambda_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Se ha realizado una gráfica de esta función para ciertos valores concretos de las constantes con el fin de observar su carácter oscilatorio, tal y como se muestra en la Figura 3.3:

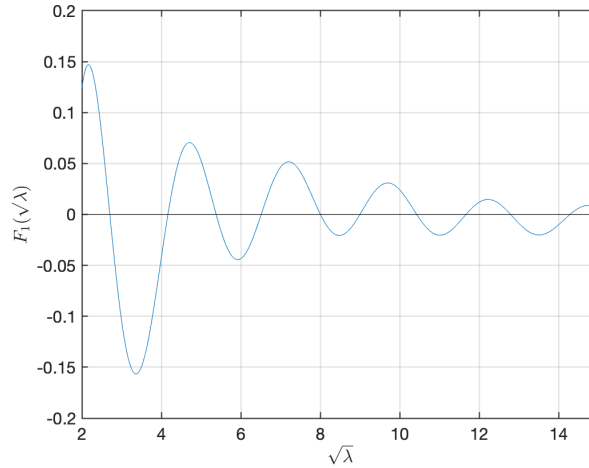


Figura 3.3: Ecuación (3.3.5) correspondiente a $n = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $R_1 = 1$ y $R_2 = 4$.

Así, para cada valor propio λ_{nk} , podemos tomar como constantes $d_n = d_{nk}$ y $\tilde{e}_n = \tilde{e}_{nk}$ de la forma:

$$d_{nk} = Y_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}R_2)J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}R_1) - J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}R_2)Y_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}R_1) \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1 \quad (3.3.6)$$

$$\tilde{e}_{nk} = J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_1^{-1}R_1) \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1 \quad (3.3.7)$$

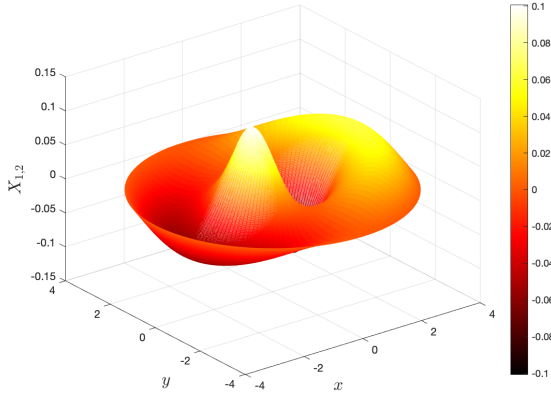
y se llega a las funciones radiales $R_{nk}(r)$:

$$R_{nk}(r) = \begin{cases} K d_{nk} J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_1^{-1}r) & \text{si } r \in [0, R_1) \\ K \tilde{e}_{nk} \left[Y_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}R_2)J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}r) - J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}R_2)Y_n(\sqrt{\lambda_{nk}}c_2^{-1}r) \right] & \text{si } r \in (R_1, R_2) \end{cases} \quad (3.3.8)$$

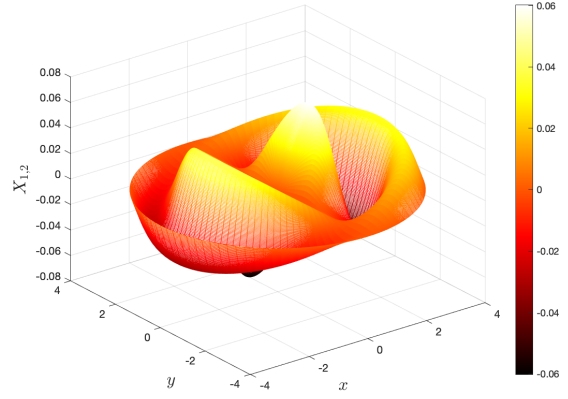
con $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finalmente, las funciones propias $X_{nk}(r, \theta)$ del problema (3.3.3) son, para cada valor propio λ_{nk} , las siguientes:

$$X_{nk}(r, \theta) = R_{nk}(r) \cos(n\theta) \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1, \quad (3.3.9)$$

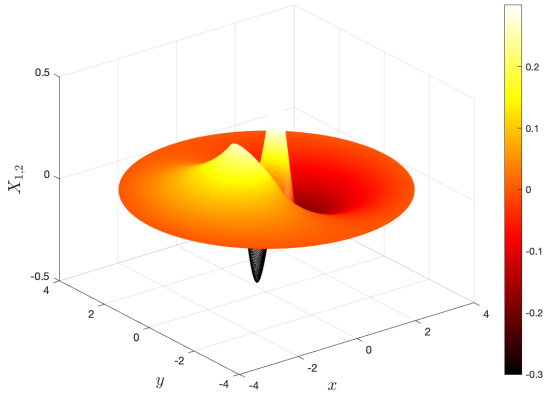
$$\tilde{X}_{nk}(r, \theta) = R_{nk}(r) \sin(n\theta) \quad \text{con } n, k \geq 1. \quad (3.3.10)$$



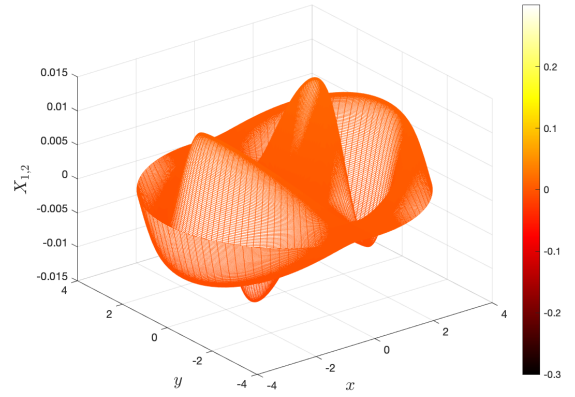
(a) Función propia $X_{1,2}$ para $R_1 = 1$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$. El segundo cero de (3.3.5) para $n = 1$ es $\sqrt{\lambda_{1,2}} \approx 2.704$, y por tanto el valor propio es $\lambda_{1,2} \approx 7.309$.



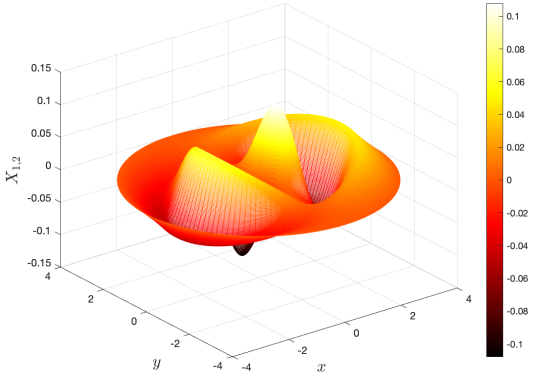
(b) Función propia $X_{1,2}$ para $R_1 = 1$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$. El segundo cero de (3.3.5) para $n = 1$ es $\sqrt{\lambda_{1,2}} \approx 2.772$, y por tanto el valor propio es $\lambda_{1,2} \approx 7.682$.



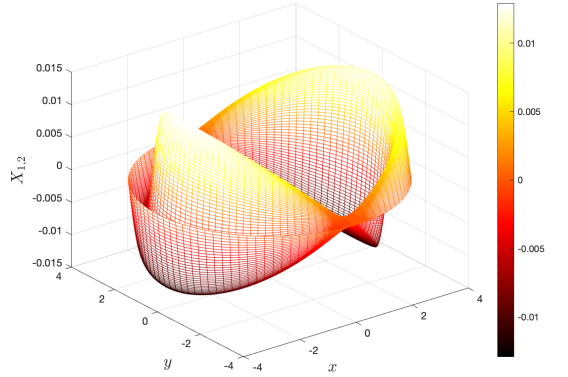
(c) Función propia $X_{1,2}$ para $R_1 = 1$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 10$. El segundo cero de (3.3.5) para $n = 1$ es $\sqrt{\lambda_{1,2}} \approx 5.492$, y por tanto el valor propio es $\lambda_{1,2} \approx 30.17$.



(d) Función propia $X_{1,2}$ para $R_1 = 1$, $c_1 = 10$ y $c_2 = 1$. El segundo cero de (3.3.5) para $n = 1$ es $\sqrt{\lambda_{1,2}} \approx 2.820$, y por tanto el valor propio es $\lambda_{1,2} \approx 7.952$.



(e) Función propia $X_{1,2}$ para $R_1 = 3$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 20$. El segundo cero de (3.3.5) para $n = 1$ es $\sqrt{\lambda_{1,2}} \approx 2.976$, y por tanto el valor propio es $\lambda_{1,2} \approx 8.856$.



(f) Función propia $X_{1,2}$ para $R_1 = 3$, $c_1 = 20$ y $c_2 = 1$. El segundo cero de (3.3.5) para $n = 1$ es $\sqrt{\lambda_{1,2}} \approx 4.814$, y por tanto el valor propio es $\lambda_{1,2} \approx 23.17$.

Figura 3.4: Representaciones gráficas de $X_{1,2}$ para diferentes densidades c_1 y c_2 así como tamaño de cada región $r \in [0, R_1]$ y $r \in (R_1, R_2)$. Las animaciones se pueden encontrar en el archivo adjunto.

De manera similar a la cuerda compuesta, para mostrar el comportamiento de X_{nk} se han realizado

distintas representaciones gráficas de una misma función propia para diferentes valores de R_1 , R_2 , c_1 y c_2 en la Figura 3.4. Se ha fijado $R_2 = 4$ y se han ido variando R_1 , c_1 y c_2 , pues nuevamente el valor de R_1 define ambas regiones.

En todas ellas se tomó $n = 1$ y $k = 2$, es decir, el valor propio $\lambda_{1,2}$, obtenido a partir del segundo cero positivo de (3.3.5) para $n = 1$. En consecuencia, la función propia representada en todas las gráficas es $X_{1,2}$. Denotaremos a la regiones según los valores para los que el radio está definido. Es decir, hablaremos de Ω_1 como la región donde r pertenece a $[0, R_1)$ y Ω_2 por la región tal que $r \in (R_1, R_2)$.

Debido a que la condición de contorno se encuentra en $r = R_2$, solo afecta a la región con $r \in (R_1, R_2)$, a diferencia de la cuerda compuesta donde ambas regiones presentaban condición de contorno. Así, una de las variaciones realizadas ha sido el intercambio de las constantes c_1 y c_2 entre las regiones para observar el cambio en la función propia. Los pares de gráficas con esta variación se han representado izquierda-derecha, siendo el primer par las Figuras 3.4a-3.4b, el segundo par las Figuras 3.4c-3.4d y por último las Figuras 3.4e-3.4f.

Al incluir en la Figura 3.4 los casos permutando las constantes, solo hemos tomado 3 combinaciones distintas de constantes, descritas en las Figuras 3.4a, 3.4c y 3.4e. A diferencia del estudio de la cuerda compuesta, no se ha variado en exceso las constantes de densidad c_1 y c_2 . Por ejemplo, en la Figura 3.4f la función propia toma valores más pequeños y su región $r \in [0, R_1)$ apenas oscila para $c_1 = 20$, aunque desde la perspectiva de la gráfica no se aprecia con claridad. Algo similar ocurre en la Figura 3.4c, donde se tomó $c_2 = 10$ y la región $r \in (R_1, R_2)$ es bastante plana en comparación a la otra región.

En todas ellas se ha tomado como función angular $\cos(n\theta)$. Esta elección se observa bastante bien en los máximos y mínimos, los cuales se alternan para valores positivos y negativos de x , ya que se relacionan ambas mediante $x = \cos \theta$.

Por otra parte y en contraste con la Figura 3.2, no se ha fijado el eje vertical en las gráficas, pues la variación de éste con la elección de las constantes es mucho mayor aquí, donde encontramos valores desde 0.5 hasta 0.015 de altura máxima de la membrana, al no estar las funciones propias normalizadas.

Observación 3.3.1 *De manera similar al efectuado en el estudio de la cuerda compuesta, si tomamos el caso específico con $c_1 = c_2 = 1$ debemos recuperar los valores y funciones propias de la membrana homogénea obtenidos en la Sección 2.2. Como el estudio de la ecuación angular es la misma, nos centraremos solamente en la parte radial. Denotando $R_2 = R_0$, la ecuación de la que se obtienen los valores propios (3.3.5) se convierte en:*

$$J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_0) \left[J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_1)Y'_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_1) - J'_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_1)Y_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_1) \right] = 0$$

y solo puede darse el caso $J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_0) = 0$, ya que el otro término se corresponde con el Wroskiano de las soluciones $J_n(r)$ y $Y_n(r)$ evaluado en el punto $r = \sqrt{\lambda_{nk}}R_1$. Como ambas soluciones son linealmente independientes, su Wroskiano nunca es nulo y en consecuencia, se debe anular el otro término, obteniendo los valores propios

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = \frac{\eta_{nk}}{R_0} \quad \text{con } n \geq 0, k \geq 1,$$

siendo $\{\eta_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ los ceros positivos de J_n . Por tanto, acabamos de recuperar los valores propios obtenidos en el caso homogéneo, como se vio en la expresión (2.2.12). En cuanto a las funciones radiales obtenidas en (3.3.8), haciendo uso de $J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_0) = 0$ se llega a

$$R_{nk}(r) = K J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_1)Y_n(\sqrt{\lambda_{nk}}R_0)J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}r) \quad \text{si } r \in [0, R_2), n \geq 0, k \geq 1,$$

es decir, las funciones radiales son de la forma $R_{nk}(r) = \tilde{K}_{nk}J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}r)$ con K_{nk} una constante, similar a la ecuación (2.2.13) del caso homogéneo.

Para finalizar y de manera similar a la cuerda compuesta, a partir de las condiciones iniciales $F(r, \theta)$ y $G(r, \theta)$ se puede calcular la solución escribiendo las condiciones iniciales en términos de la base ortogonal de funciones propias $\{X_{nk}(r, \theta)\}$ y $\{\tilde{X}_{nk}(r, \theta)\}$, y obteniendo los coeficientes de Fourier tanto de $F(r, \theta)$

como de $G(r, \theta)$. Sin embargo, en este capítulo no se entrará en detalle.

Cuando las condiciones iniciales son funciones propias, por ejemplo si tomamos para unos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ fijos, $F(r, \theta) = aX_{nk}(r, \theta)$ y $G(r, \theta) = 0$ con a no nulo, o por el contrario $F(r, \theta) = 0$ y $G(r, \theta) = bX_{nk}(r, \theta)$ con b no nul, se obtienen las soluciones estacionarias:

$$U(r, \theta, t) = aX_{nk}(r, \theta) \cos(\sqrt{\lambda_{nk}}t) \quad \text{y} \quad U(r, \theta, t) = \frac{b}{\sqrt{\lambda_{nk}}} X_{nk}(r, \theta) \sin(\sqrt{\lambda_{nk}}t).$$

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, United States Department of Commerce, 1972.
- [2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, editorial Springer, 2011.
- [3] E. Casas. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Cantabria, 1992.
- [4] E. A. Coddington. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, editorial Continental, 1971.
- [5] S. J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover Publications, Inc, 2016.
- [6] L. A. Fernández. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Cantabria, 2020.
- [7] G. B. Folland. *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992.
- [8] D. Gómez. *Vibraciones de Sistemas con una Masa Concentrada*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 1999.
- [9] D. Gómez, S. A. Nazarov and M. E. Perez. *A Dirichlet Spectral Problem in Domains Surrounded by Thin Stiff and Heavy Bands*, Springer International Publishing, 2020.
- [10] D. Gómez, M. Lobo, E. Pérez. *On the Eigenfunctions Associated with the High Frequencies in Systems with a Concentrated Mass*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 78, p. 841-865, 1999.
- [11] T. Myint-U, L. Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, editorial Springer, 2007.
- [12] P. V. O'Neil. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Cengage Learning, 2008.
- [13] M. M. Smirnov. N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner. *Differential Equations of Mathematical Physics*, North-Holland Publishing Company & Brooks/Cole, 1964.
- [14] H. F. Weinberger. *A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*, Dover publications, 1995.